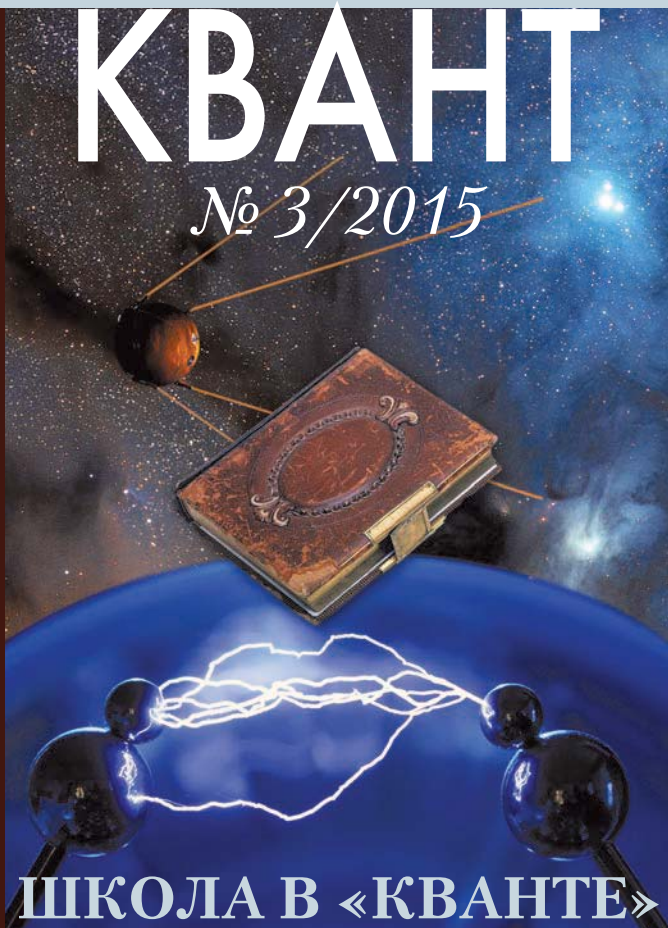




ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№ 3/2015



ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ФИЗИКА

ЧАСТЬ 1

Приложение к журналу

«КВАНТ»

№3/2015

---

**ШКОЛА В «КВАНТЕ»**

**ФИЗИКА**

**Часть 1**

*Составители*

*В.А. Тихомирова, А.И. Черноуцан*

Москва

Издательство МЦНМО

2015

УДК 53  
ББК 22.3  
Ш67

Приложение к журналу  
«Квант» №3/2015

Ш67 **Школа в «Кванте». Физика. Часть 1** / Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. – М.: Издательство МЦНМО, 2015. – 208 с. (Приложение к журналу «Квант» №3/2015.)

ISBN 978-5-4439-0632-4

Книга представляет собой сборник статей по всем разделам школьной физики, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Школа в «Кванте» в течение 1997–2003 годов. Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками и живость изложения – вот отличительные особенности статей этой рубрики.

Книга адресована, прежде всего, учащимся и учителям средних школ, лицеев и гимназий. Но она, несомненно, будет интересна и самому широкому кругу читателей.

ББК 22.3

ISBN 978-5-4439-0632-4



9 785443 906324 >



# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие	4
Глава 1. <b>МЕХАНИКА</b>	5
Кинематика точного курса (6). Поиски минимума в физических задачах (11). Сухое трение (15). Невесомость ... в автомобиле? (23). Удивительная бутылка (25). Удивительные катки (32). Обратная задача Всемирного потопа (37). Как летать: дальше или тише? (44). Дело – труба (49). Рычажные весы (52). Почему кувыркается книга? (56). Как студент огород поливал (59). Такие простые качели (64). Маятник с несколькими грузиками (67). Похожие движения (71). Печаль или радость (75). Вращение: реки, тайфуны, молекулы (85). Сколько стоит запуск спутника? (89). Хаос молекул и звезд (94)	
Глава 2. <b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА</b>	100
Внутренняя энергия и теплота (101). Как чайник стал таймером (106). Молекулы, сосиски и алмазы (110). Эстафетный бег молекул, или Как работает термос (115). Снежинки и ледяные узоры на стекле (119)	
Глава 3. <b>ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ</b>	122
Конденсатор в коробке и потенциальность кулоновского поля (123). Участок цепи с источником тока (128). Преобразование электрических цепей (135). Горки, электрические токи и Кулон (142). Эффективное напряжение в сети переменного тока (148). Эта загадочная магнитная сила (151). Еще раз о магнитной силе (156). Закон электромагнитной индукции или «правило потока»? (160). Два кольца в одном магнитном поле (164). Откуда течет энергия: открытие за открытием (170)	
Глава 4. <b>ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА</b>	176
Интерференция на островах Синего Мыса (177). Небо синее, солнце красное (181). Хочешь общаться – излучай (186). Разрешающая способность измерительных приборов (191). Изотопные источники энергии (197). Следы в камере (201)	

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

В этой книге представлена одна из постоянных рубрик нашего журнала – «Школа в «Кванте». Возникнув около тридцати пяти лет назад, «Школа» сразу завоевала популярность у читателей, интерес к ней не ослабевает и по сей день.

Материалы этой рубрики, как правило менее сложные и элитарные по сравнению с материалами других рубрик, рассчитаны на самый широкий круг читателей. Темы статей обычно перекликаются с разделами школьной программы по физике. Можно сказать, что «Школа в «Кванте» – это интересное чтение «вдоль» этой программы.

Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками, живость и своеобразная эссеичность изложения не только делают статьи «Школы» доступными для самостоятельного изучения, но и позволяют использовать их для докладов и рефератов на школьных факультативах и конференциях или просто для «оживления» текущих занятий.

За прошедшие годы накопилось так много статей «Школы в «Кванте» по физике, что мы решили собрать их в несколько книг. Причем каждую книгу сделать «полноценной», независимой от других – в том смысле, что в нее войдут статьи по всем разделам физики, от кинематики до атомного ядра.

Перед вами – первый выпуск задуманной серии.

## МЕХАНИКА



## КИНЕМАТИКА ТОЧНОГО КУРСА

*А. Черноуцан*

Что общего в поведении капитана корабля, плывущего через океанские просторы, командира самолета, совершающего дальний перелет, или лодочника, пересекающего быструю реку на небольшой моторной лодке? Каждый из них должен решить сложнейшую навигационную задачу – выбрать оптимальный курс в условиях перемещения относительно движущейся среды (т.е. с учетом океанских и речных течений и переменчивых ветров).

Представьте себя для начала капитаном, приступающим к корректировке курса своего корабля. Конечно, первая (и весьма трудная!) задача – точно определить свои координаты в отсутствие каких-либо зрительных ориентиров. До изобретения радио и появления радиомаяков мореплавателям приходилось иногда дни и недели ждать, когда, наконец, откроется небо и можно будет с помощью солнца и звезд узнать, куда тебя занесли ветры и течения, и весьма приблизительно нанести на карту свое местоположение. В наше время эта проблема существенно упростилась, и будем предполагать, что мы с ней успешно справились.

Что дальше? Обозначив на карте положение корабля, выбираем направление дальнейшего движения (в простейшем случае – точно на порт назначения, если только не надо обогнуть Бермудский треугольник или группу гигантских айсбергов). Казалось бы, осталось только отдать приказ – взять курс в этом направлении. Но нет, необходимо сначала посмотреть на карту океанских течений и, если надо, сделать соответствующую поправку. Скорость океанских и морских течений может быть не столь уж мала; к примеру, скорость знаменитого Гольфстрима достигает 10 км/ч. Как же сделать поправку на течение и определить точный курс?

Когда капитан указывает курс, рулевой поворотами руля устанавливает в этом направлении корпус корабля. (Более точно – в указанном направлении устанавливается горизонтальная ось корабля, т.е. линия, проведенная от середины кормы к носу.)



Если бы не было течения, волн и ветра, то именно в этом направлении двигался бы корабль, причем со скоростью, соответствующей его ходовым характеристикам. Для каждого корабля существует индивидуальная зависимость его скорости в спокойной неподвижной воде от режима работы двигателя (от числа оборотов). Если же есть заметное течение, то скорость корабля оказывается иной как по величине, так и по направлению – корабль, как говорят, сносит течением.

Предположим для простоты, что ветер и волны отсутствуют, и перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся водой, т.е. двигающуюся со скоростью течения. В этой системе вода неподвижна, а корабль движется точно вдоль своей оси с расчетной скоростью. Значит, именно этой относительной скоростью  $\vec{v}_{\text{отн}}$  управляет капитан корабля, задавая курс и число оборотов двигателя. Скорость же корабля относительно берега  $\vec{v}$  определяется законом сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_в, \quad (1)$$

где  $\vec{v}_в$  – скорость воды (скорость течения). Это векторное равенство означает, что указанные три скорости образуют треугольник (рис.1). После определения (по карте) направления на порт назначения, т.е. направления скорости  $\vec{v}$ , и направления и величины скорости течения  $\vec{v}_в$  нам известны в этом треугольнике угол  $\alpha$  и сторона  $\vec{v}_в$ . Если капитан решает не менять число оборотов двигателя, то  $\vec{v}_{\text{отн}}$  тоже известна.

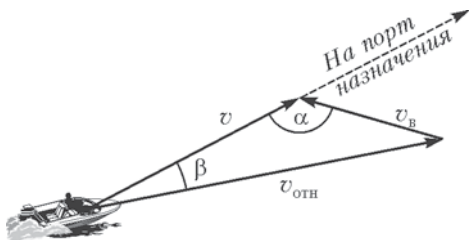


Рис. 1

Нам надо определить угол  $\beta$  – его называют углом сноса. Спроектировав равенство (1) на направление, перпендикулярное вектору  $\vec{v}$ , получим

$$0 = v_{\text{отн}} \sin \beta - v_в \sin \alpha, \quad (2)$$

откуда и находим угол  $\beta$ . Например, если скорость хода 30 км/ч, а скорость течения равна 4 км/ч и составляет с направлением движения угол  $120^\circ$ , то угол сноса составит приблизительно  $6,5^\circ$ .

Чтобы узнать, с какой скоростью  $v$  мы приближаемся к цели, спроектируем равенство (1) на направление вектора  $\vec{v}$  и



найдем

$$v = v_{\text{отн}} \cos \beta - v_{\text{в}} \cos \alpha . \quad (3)$$

Подставляя численные данные для разобранный примера, получим, что скорость  $v$  равна примерно 27,8 км/ч.

Впрочем, можно поставить задачу немного иначе. Если задаться целью прибыть в порт назначения точно в срок, то надо поддерживать скорость движения  $v$  постоянной. Необходимую для этого  $v_{\text{отн}}$  можно найти из теоремы косинусов:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v^2 + v_{\text{в}}^2 - 2vv_{\text{в}} \cos \alpha} , \quad (4)$$

после чего можно по формуле (2) определить угол сноса  $\beta$ . Так, в нашем примере для поддержания скорости корабля 30 км/ч надо увеличить число оборотов так, чтобы относительная скорость равнялась 32,2 км/ч, а угол сноса сделать равным примерно  $6,2^\circ$ .

Отметим, что кроме течения есть и другие факторы, влияющие на направление и величину скорости корабля. Это, в первую очередь, сильный ветер, создающий дополнительное боковое давление на борт (можно сказать, что корабль движется не в одной подвижной среде, а в двух – водной и воздушной). При ветре направление движения корабля относительно воды может немного отличаться от направления его оси. Кроме того, дополнительное отклонение возникает за счет регулярных ударов волн, если они приходятся на один из бортов. Учесть эти факторы можно только приблизительно, и поэтому надо периодически замерять координаты корабля и производить корректировку курса.

Теперь давайте пересядем на самолет, совершающий многочасовой перелет, и попробуем учесть влияние ветра. Проблемы для воздушного лайнера во многом такие же, как для океанского. Видимые ориентиры на поверхности часто скрыты облаками, а при высоких скоростях даже небольшие ошибки в выборе курса могут быстро привести к заметным отклонениям. Конечно, летчикам не приходилось совершать дальние перелеты в эпоху до изобретения радио, но несколько десятков лет назад, до появления систем глобальной радиолокации и спутниковой связи, проблема ориентации стояла весьма остро (вспомните, например, Экзюпери). В наши дни задачу выбора курса решает не только летчик, но и находящийся с ним в постоянном контакте наземный диспетчер, который по радиолокационным данным может отслеживать положение самолета и вычислять направление и величину его скорости (относительно земли). Вдали от

аэропорта, вне связи с диспетчером, летчик следит за тем, чтобы не выйти за пределы выделенного ему воздушного коридора с помощью радиомаяков, доступных ему в течение перелета.

В отличие от корабля, взаимодействующего не только с водной средой, но и с воздушной, самолет испытывает отклоняющее влияние только одной движущейся среды – воздушной. В системе отсчета, связанной с воздухом (т.е. движущейся со скоростью ветра), скорость самолета  $\vec{v}_{\text{отн}}$  направлена вдоль его оси. Его скорость относительно земли  $\vec{v}$  можно найти с помощью формулы (1), только  $\vec{v}_в$  обозначает теперь не скорость воды, а скорость воздуха (ветра). Хотя скорость самолета в десятки раз больше, чем скорость корабля, но и скорость ветра может быть значительно больше скорости течения. При взлете и посадке скорость самолета составляет 220–280 км/ч, т.е. 60–80 м/с, а скорость бокового ветра может достигать 15–20 м/с (при более сильном ветре посадка запрещена). На высоте 8–10 км, где проходит большая часть полета, самолет летит со скоростью 600–900 км/ч (на этой высоте плотность воздуха, а значит, и лобовое сопротивление в два с лишним раза меньше), однако и ветры, регулярно дующие на этих высотах (их называют струйными), могут иметь скорость до 40–50 м/с.

Главная трудность в расчете полетного задания состоит в том, что, в отличие от морских течений, невозможно создать устойчивую карту струйных ветров, поскольку день ото дня их скорость меняется и по величине, и по направлению. Примерная схема корректировки курса выглядит следующим образом. После набора нужной высоты диспетчер задает кораблю курс (т.е. направление и величину  $\vec{v}_{\text{отн}}$ ), исходя из предполагаемой скорости ветра (определенной при пролете по этому коридору предыдущего самолета). После этого он определяет по данным радиолокации направление и величину скорости  $\vec{v}$  самолета относительно земли. Если она заметно отличается от ожидаемой, то необходимо внести поправку на изменение скорости ветра. Зная  $\vec{v}_{\text{отн}}$  и  $\vec{v}$ , можно с помощью формулы (1) определить новую скорость ветра  $\vec{v}_в$  (подумайте, как это сделать) и произвести необходимую корректировку.

Особое значение боковой ветер играет при взлете и посадке. Рассмотрим, какие трудности могут возникать во время посадки, проходящей при сильном боковом ветре. С момента, когда колеса шасси коснулись земли, самолет начинает взаимодействовать не только с воздухом, но и с твердой поверхностью. При качении по полосе всеми колесами – передними и задними – самолет должен быть ориентирован вдоль линии движения, т.е.

вдоль посадочной полосы (иначе возникает опасность поломки шасси или разворота корпуса самолета). Однако при приближении к полосе у самолета может быть значительный угол сноса, т.е. его корпус может быть заметно повернут по отношению к полосе. Как рассказывают летчики, при посадке на легком самолете (со сравнительно небольшой посадочной скоростью) самолет бывает повернут так, что стойка окна мешает видеть всю полосу. Выход состоит в том, что надо садиться сначала на задние колеса, после чего действующая на них сила трения быстро выравнивает корпус самолета, и можно начинать качение на полном шасси.

Теперь нам осталось только пересечь быструю речку на небольшой моторной лодке. Многое из сказанного относится и к этому случаю, но здесь может возникнуть ситуация, с которой мы раньше не встречались. Если скорость течения реки  $v_{\text{в}}$  больше, чем скорость нашей лодки  $v_{\text{отн}}$  относительно воды, то совсем не все направления движения нам доступны. В частности, мы при всем желании не сможем пересечь речку и оказаться точно напротив точки отплытия. Однако мы можем постараться сделать так, чтобы нас снесло течением как можно меньше. Для

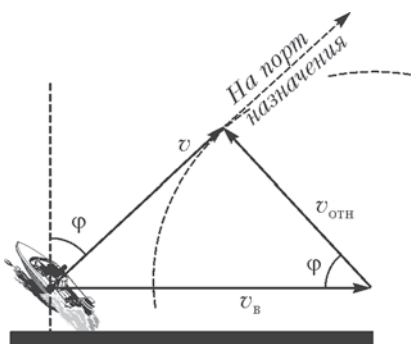


Рис. 2

этого надо, чтобы угол  $\varphi$  между направлением скорости  $\vec{v}$  и перпендикуляром к линии берега был как можно меньше. «Изобразим» на рисунке 2 формулу (1) и посмотрим, как будет меняться направление скорости  $\vec{v}$  при различных направлениях скорости  $\vec{v}_{\text{отн}}$  (т.е. в зависимости от ориентации корпуса лодки). Видно, что конец вектора  $\vec{v}_{\text{отн}}$  описывает окружность, и самый маленький угол  $\varphi = \arccos(v_{\text{отн}}/v_{\text{в}})$  достигается в том случае, когда вектор  $\vec{v}$  направлен по касательной к этой окружности. Для этого надо направить корпус лодки против течения под углом  $\varphi$  к линии берега. Интересно, что в этом случае лодка будет плыть в направлении, перпендикулярном линии корпуса.

## ПОИСКИ МИНИМУМА В ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

*С. Серохвостов*

Готовились как-то девятиклассники Саша, Коля и Петя к районной олимпиаде по физике. Учитель предложил им решить задачу с прошлой олимпиады. Вот ее условие:

*Мальчик подошел к последнему вагону электрички в тот момент, когда электричка тронулась и начала двигаться с постоянным ускорением  $a$ . Единственная открытая дверь электрички оказалась от мальчика на расстоянии  $s$ . Какую наименьшую постоянную скорость должен развить мальчик, чтобы успеть сесть в поезд?*

После уроков ребята собрались у Саши дома и стали решать.

— Эта задача решается просто, — сказал Саша. — Давайте выберем систему отсчета так, чтобы начало координат совпадало с начальным положением мальчика, а ось  $x$  была направлена вдоль платформы. Пусть мальчик бежал со скоростью  $v$  и запрыгнул в вагон через время  $t$ . Так как мальчик запрыгнул в эту дверь, то можно записать

$$vt = s + \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Отсюда мы найдем  $v$ .

— Подожди, — сказал Коля, — но у нас одно уравнение, а неизвестных величин две:  $v$  и  $t$ . Поэтому из этого уравнения мы ничего не найдем!

На это Петя возразил:

— Ну хоть что-нибудь мы найти сможем. Например, давайте выразим скорость:

$$v = \frac{s}{t} + \frac{at}{2}. \quad (2)$$

— А еще нам надо учесть, что скорость должна быть минимально возможной, — напомнил Коля.

Старший брат Саши, который учился в десятом классе, в это время проходил мимо комнаты, в которой сидели ребята, и сказал:

– Если минимум, то нужно искать производную!

– А мы еще ее не проходили, – ответил ему Саша. – И потом, наверное, можно и без производной. Нужно просто узнать, при каком  $t$  скорость будет минимальна.

– Придумал! – вскрикнул Коля. – Помните, нам на математике говорили, что всегда справедливо соотношение

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

причем равенство будет только при  $x = 1$ . За  $x$  можно обозначить любую величину. Например, можно написать, что

$$v = \sqrt{\frac{as}{2}} \left( \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2s}{a}} + t \sqrt{\frac{a}{2s}} \right).$$

Теперь положим

$$x = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1$$

и получим

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}, \quad v = \sqrt{2as}.$$

– Здорово! – сказал Петя. – Интересно, а можно ли решить другим способом? Давайте рассуждать так. Чем медленнее мальчик будет бежать, тем больше времени он затратит. А при какой-то скорости он вообще не догонит эту дверь. Выразим время из уравнения (1):

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2as}}{a}.$$

Смотрите, при  $v^2 < 2as$  решения не существует, так как выражение под корнем меньше нуля! Значит, минимально возможная скорость определяется равенством

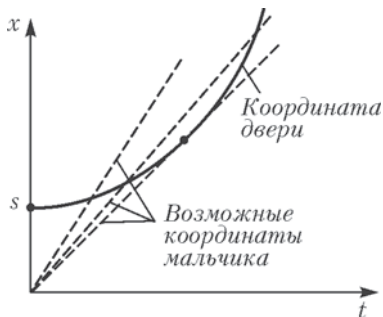
$$v^2 = 2as,$$

и ответ совпадает с ответом Коли!

Саша после небольшого раздумья сказал:

– А можно еще и третьим способом решить. Давайте построим графики зависимости координат мальчика и двери от времени. В тот момент, когда они пересекутся, мальчик и догонит дверь поезда.

Саша взял карандаш и сделал рисунок.



– Смотрите, чем меньше наклон графика координаты мальчика, тем медленнее он бежит. Наименьшая скорость, при которой он может добежать до двери, соответствует нижней прямой. А она касается графика координаты двери. Это значит, что для такого случая скорости мальчика и двери в момент запрыгивания одинаковы! Скорость двери мы легко найдем:

$$v_{\text{д}} = at ,$$

откуда найдем и время:

$$t = \frac{v_{\text{д}}}{a} .$$

Подставим это время в уравнение (1) и получим ответ.

А Сашин брат решил проверить результаты мальчиков – он взял производную по времени от выражения (2) и приравнял ее к нулю:

$$v' = -\frac{s}{t^2} + \frac{a}{2} = 0 .$$

Отсюда он нашел время:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

и, подставив это выражение в формулу (2), получил такой же ответ, как и ребята.

– Молодец у меня брат, да и друзья его тоже молодцы! – подумал он.

На следующий день ребята гордо показали учителю свои решения. Учитель их похвалил.

– Молодцы! Вы не только получили решение, но и рассмотрели различные методы решения задач на минимум. Ты, Коля, преобразовал выражение к виду, для которого мы знаем минимум. Ты, Петя, рассмотрел область допустимых значений выражения. Ты, Саша, проанализировал решение графически и

нашел точки касания графиков. Ну а твой брат, Саша, предложил способ решения с помощью производной. Он наиболее универсален, но иногда другие методы проще для вычислений. Я же могу предложить еще один способ.

Давайте перейдем в систему отсчета, которая связана с мальчиком. В этой системе начальная скорость открытой двери равна  $-v$ , ее начальная координата  $s$ , ускорение  $a$ , и поэтому зависимость координаты открытой двери  $x_1$  от времени имеет вид

$$x_1 = s - vt + \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Условием того, что мальчик добежит до двери, будет равенство

$$x_1 = 0,$$

т.е. в этот момент парабола (3) пересечет ось абсцисс на координатной плоскости  $(x_1, t)$ . Но наименьшая скорость соответствует случаю, когда парабола коснется оси  $t$ . Вам остается только найти выражение для координат вершины параболы и приравнять  $x_1$  к нулю. Но это вы должны будете проделать самостоятельно и сравнить с вашими ответами. А метод, который использовал я, можно назвать методом перехода в другую систему отсчета.



## СУХОЕ ТРЕНИЕ

*И.Слободецкий*

Почему при резком торможении автомобиль заносит? Почему скрипит плохо смазанная дверь? Почему движущийся равномерно смычок заставляет звучать скрипичную струну? Все это объясняется свойствами сил трения, о которых и пойдет речь в этой статье.

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения. Это связано даже не с тем, что трение имеет сложную природу, а скорее с тем, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Вот пример. Английский физик Гарди исследовал зависимость силы трения между стеклянными пластинками от температуры. Он тщательно обрабатывал пластинки хлорной известью и обмывал их водой, удаляя жиры и загрязнения. Трение увеличивалось с температурой. Опыт был повторен много раз, и каждый раз получались примерно одни и те же результаты. Но однажды, моя пластинки, Гарди протер их пальцами – трение перестало зависеть от температуры. Протерев пластинки, Гарди, как он сам считал, удалил с них очень тонкий слой стекла, изменивший свои свойства из-за взаимодействия с хлоркой и водой.

Когда говорят о трении, различают три похожих, но не совсем одинаковых физических явления: сопротивление при движении тела в жидкости или газе – его называют жидким трением; сопротивление, возникающее, когда тело скользит по какой-нибудь поверхности, – трение скольжения, или сухое трение; сопротивление, возникающее при качении тела, – трение качения. Эта статья посвящена сухому трению.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи примерно 500 лет назад. Он

измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске, причем, ставя бруски на разные грани, определял зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи стали известны уже после того, как классические законы трения были вновь открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном в 17–18 веках. Вот эти законы:

1) Величина силы трения  $F$  прямо пропорциональна величине силы нормального давления  $N$  тела на поверхность, по которой движется тело, т.е.  $F = \mu N$ , где  $\mu$  – безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения.

2) Сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями.

3) Коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей.

4) Сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет дальнейших исследований трения подтвердили правильность трех первых законов, предложенных Амонтоном и Кулоном. Неверным оказался лишь последний – четвертый. Но это стало ясно много позже, когда появились железные дороги и машинисты заметили, что при торможении состав ведет себя не так, как предсказывали инженеры.

Амонтон и Кулон объясняли происхождение трения довольно просто. Обе поверхности неровные – они покрыты небольшими горбами и впадинами. При движении выступы цепляются друг за друга, и поэтому тело все время поднимается и опускается. Для того чтобы втащить тело на «холм», к нему нужно приложить определенную силу. Если выступ больше, то и сила нужна побольше. Но это объяснение противоречит одному очень существенному явлению: на преодоление трения тратится энергия. Так, кубик, скользящий по горизонтальной поверхности, рано или поздно останавливается. А поднимаясь и опускаясь, тело не тратит своей энергии. Или вспомните аттракцион «Американские горки». Когда санки скатываются с горки, их потенциальная энергия переходит в кинетическую и скорость санок возрастает, а когда санки въезжают на новую возвышенность, кинетическая энергия, наоборот, переходит в потенциальную. Энергия санок уменьшается за счет трения, но не из-за подъемов и спусков. Аналогично обстоит дело и при движении одного тела по поверхности другого. Здесь потери энергии на трение также не могут быть связаны с тем, что выступы одного тела «взбираются» на бугры другого.

Есть еще возражения. Например, простые опыты по измере-

нию силы трения между полированными стеклянными пластинками показали, что при улучшении полировки поверхностей сила трения сначала не меняется, но затем возрастает, а не убывает, как следовало бы ожидать на основании модели явления, предложенной Амонтоном и Кулоном.

Механизм трения значительно более сложен. Обсудим такую модель. Из-за неровностей поверхностей они касаются друг друга только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасающихся тел подходят друг к другу на расстояния, соизмеримые с расстоянием между молекулами в самих телах, и сцепляются. Образуется прочная связь, которая рвется при нажиме на тело. Во время движения тела связи постоянно возникают и рвутся. При этом возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится энергия.

Площадь действительного контакта обычно порядка тысяч квадратных микронов. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул.

Теперь понятен опыт с полированными стеклянными пластинками. Пока поверхности были «грубые», число контактов было невелико, а после хорошей полировки оно возросло. Можно привести еще пример увеличения трения с улучшением поверхности. Если взять два металлических бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится очень большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит.

Рассмотренная нами модель трения довольно груба. Мы не останавливались здесь на диффузии, т.е. на проникновении молекул одного тела в другое, на роли электрических зарядов, возникающих на соприкасающихся поверхностях, на механизме действия смазки. Эти вопросы во многом неясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом:  $F = \mu N$ . И хотя коэффициент трения  $\mu$  не очень постоянен и несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике,

можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Сухое трение имеет одну существенную особенность: наличие трения покоя. В жидкости или газе трение возникает только при движении тела, и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу. Однако при сухом трении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы  $\vec{F}$  на плоскость, касательную к поверхности, на которой лежит тело, станет больше некоторой величины (рис.1). Пока

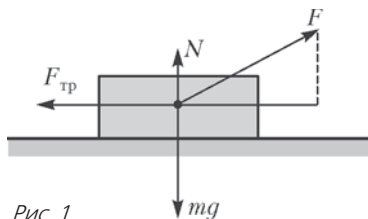


Рис. 1

тело не начало скользить, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы сила трения тоже возрастает, пока не достигает максимальной величины, равной  $\mu N$ , при которой начинается скольжение. Дальше сила трения уже не меняется.

Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос, какая сила трения действует на стол массой 30 кг, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4, большинство уверенно отвечает: 120 Н, что неверно. Сила трения равна нулю – иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то, для того чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, бóльшую максимально возможной силы трения покоя, которая обусловлена прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

Попробуйте проделать простой опыт. Возьмите книжку и положите ее одним краем на другую книжку потолще. Получится наклонная плоскость. Теперь положите на эту плоскость спичечный коробок, к которому привязана нитка. Если коробок скользит, то уменьшите наклон плоскости, взяв книжку-подстав-

ку потоньше. Потяните за нитку коробок вбок. При этом он поедет еще и вниз! Уменьшите наклон плоскости и опять потяните за нитку. Та же картина. Коробок соскальзывает даже при очень малых углах наклона плоскости. Сила трения, раньше удерживавшая коробок на плоскости, стала почему-то очень маленькой.

Постараемся понять, в чем здесь дело. Если бы коробок двигался только горизонтально, то параллельно ребру наклонной плоскости на него действовала бы сила трения, равная  $\mu N$ . Для того чтобы коробок при этом не соскальзывал вниз, вверх на него должна действовать сила трения, равная по величине проекции силы тяжести короба на наклонную плоскость. Равнодействующая этих двух сил трения больше  $\mu N$ , а этого быть не может. Значит, коробок должен соскальзывать с наклонной плоскости.

Теперь представим себе такую ситуацию. Возьмем брусок, привяжем к нему нить и, положив брусок на горизонтальную плоскость, будем тянуть за нить с постоянной скоростью  $v_1$  (рис.2; вид сверху). Приложив к бруску силу, перпендикуляр-

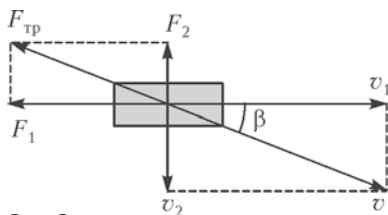


Рис. 2

ную  $\vec{v}_1$ , его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью  $\vec{v}_2$ . Сила трения при этом будет равна  $\mu N$  и направлена противоположно скорости  $\vec{v}$  движения бруска относительно плоскости ( $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ).

Разложим силу трения на две составляющие – по направлению скоростей  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ :

$$F_1 = F_{\text{тр}} \cos \beta, \quad F_2 = F_{\text{тр}} \sin \beta,$$

где  $\beta$  – угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}$ , а  $\tan \beta = v_2/v_1$ . Составляющая  $\vec{F}_1$  силы трения уравнивает силу натяжения нити, а составляющая  $\vec{F}_2$  уравнивает «боковую» силу, приложенную к бруску. Так как

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}},$$

то

$$F_2 = F_{\text{тр}} \frac{v_2/v_1}{\sqrt{1 + (v_2/v_1)^2}} = F_{\text{тр}} \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Если  $v_2 \ll v_1$ , то угол  $\beta$  мал и  $\sin \beta \approx \text{tg } \beta$ . В этом случае

$$F_2 = F_{\text{тр}} \text{tg } \beta = \mu N \frac{v_2}{v_1},$$

и составляющая силы трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такой, как при малых скоростях в случае жидкого трения. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.

Любопытный вывод можно теперь сделать относительно коробка, равномерно движущегося по наклонной плоскости (рис.3). Здесь

$$F_2 = mg \sin \alpha, \text{ а } N = mg \cos \alpha$$

( $m$  – масса коробка,  $\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту).

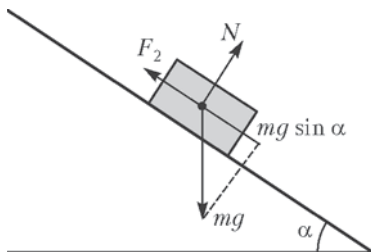


Рис. 3

Поэтому

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

откуда

$$v_2 = v_1 \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{\mu^2 - \text{tg}^2 \alpha}}.$$

Это справедливо, конечно, лишь при  $\text{tg } \alpha < \mu$ , так как при больших углах наклона плоскости к горизонту коробок уже не удерживается на плоскости силой трения. При малых углах наклона плоскости к горизонту (таких, что  $\text{tg } \alpha \ll \mu$ )

$$v_2 = v_1 \frac{\text{tg } \alpha}{\mu},$$

т.е. скорость соскальзывания коробка пропорциональна скорости его движения параллельно ребру наклонной плоскости и тангенсу угла наклона плоскости к горизонту.

Явление, о котором шла речь, встречается довольно часто. Например, известно, что при резком торможении электродвигателя ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что при торможении двигателя ремень начинает проскальзывать относительно шкивов и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекося в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня.

Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его сгибают и тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление, и машину «заносит»: колеса скользят по дороге, а за счет неровностей дороги возникает боковая сила.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона–Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь связаны со многими специфическими трудностями, они окупаются использованием полученных сведений – например, в теории резания металлов, в расчетах движения пули и снарядов в стволе и т.д.

Обычно считают, что, для того чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить бóльшую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Так, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в стволе показали, что с увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, потом она уменьшается все медленнее, а затем (при скоростях больше 100 м/с) начинает

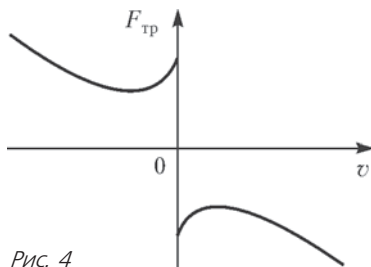


Рис. 4



возрастать. График зависимости силы трения от скорости показан на рисунке 4. Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 м/с температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла – трение становится жидким. А при больших скоростях сила жидкого трения пропорциональна квадрату скорости.

Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах – скрипке, виолончели, альте. При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы. Но при проскальзывании трение уменьшается, поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, смычок опять захватывает струну, и все повторяется сначала. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, поскольку энергия, потерянная струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

Этим можно и закончить статью о сухом трении – явлении, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления и делать необходимые расчеты.

## НЕВЕСОМОСТЬ ... В АВТОМОБИЛЕ?

С.Пикин

Чтобы безаварийно ездить по дорогам, нужно, конечно, знать правила дорожного движения. Но и законы механического движения – тоже. В этом легко убедиться, например, решая следующую весьма типичную школьную задачу:

*С какой скоростью автомобиль должен проходить середину выпуклого моста радиусом 40 м, чтобы пассажир на мгновение оказался в состоянии невесомости?*

Свяжем систему отсчета с землей. На пассажира действуют две силы – сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$ . Поскольку в верхней точке моста он находится в состоянии невесомости, то  $N = 0$ . Запишем второй закон Ньютона для пассажира в проекциях на ось  $y$  (рис.1):

$$ma = mg, \text{ где } a = \frac{v^2}{R}.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{gR} = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч}.$$

Вроде бы все благополучно: скорость не превышает допустимую. Но если продолжить задачу и задаться вопросом, что будет после прохождения вершины моста (или что было до этого момента), то на смену уверенности в правильности решения приходит убеждение в невозможности ситуации, описанной в условии задачи. Найдем, к примеру, вес пассажира  $P$  до того, как автомобиль попал в верхнюю точку моста, если движение автомобиля считать равномерным со скоростью  $v = \sqrt{gR}$  (рис.2). Опять запишем уравнение движения пассажира в проекциях на

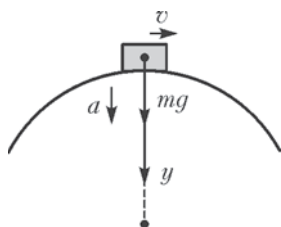


Рис. 1

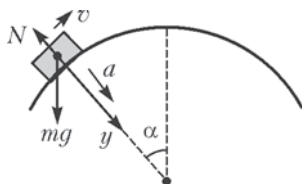


Рис. 2

ось  $y$ :

$$mg \cos \alpha - N = ma, \text{ где } a = \frac{v^2}{R}, \quad v = \sqrt{gR}.$$

Отсюда находим

$$N = mg(\cos \alpha - 1) \text{ и } P = N = mg(\cos \alpha - 1).$$

Получается, что если в верхней точке  $N = 0$ , то в остальных точках  $N < 0$ ! Значит, чтобы пассажир не взлетел над сиденьем, он должен за что-то держаться. Но машине «держаться» не за что, т.е. она оторвется от поверхности моста, как только въедет на него, и, пролетев по воздуху, упадет на трассу. Наиболее вероятным результатом такого пребывания в состоянии невесомости будет разбитая машина. Иными словами, попытавшись проехать выпуклый мост со скоростью  $v = \sqrt{gR}$ , вы не только не сможете на середине моста на мгновение оказаться в состоянии невесомости, но и подвергнетесь риску стать инвалидом.

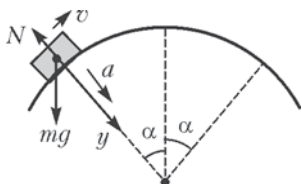


Рис. 3

Как же быть? При какой постоянной скорости автомобиль все же сможет проехать выпуклый мост радиусом  $R$  и длиной дуги, соответствующей углу  $2\alpha$  (рис.3)?

Из полученной для  $N$  формулы следует, что сила реакции достигает наименьшего значения при въезде на мост. Значит, если машина не взлетит в первый же момент, то этого не произойдет и далее. Тогда имеем

$$mg \cos \alpha - N = ma, \text{ где } N \geq 0 \text{ и } a = \frac{v^2}{R},$$

откуда следует

$$v \leq \sqrt{gR \cos \alpha}.$$

Вот она – скорость, с которой можно проехать мост. А состояние невесомости при этой скорости вы испытаете даже дважды: въезжая на мост и съезжая с него.

## УДИВИТЕЛЬНАЯ БУТЫЛКА

*Е.Ромишевский*

Много загадочных физических явлений связано с обыкновенной стеклянной бутылкой и содержащейся в ней жидкостью. Например, можно спросить себя или друзей: как быстрее наполнить или опорожнить бутылку; как интереснее ее утопить или извлечь из нее плотную пробку? Сейчас мы рассмотрим несколько необычную проблему: как разбить такую бутылку с жидкостью голыми руками (не используя каких-либо других физических тел) при этом, естественно, не поранив руки?

Вообразим такой эксперимент. Возьмем для конкретности обычную поллитровую бутылку, имеющую форму двух цилиндров – основной части и горлышка. Масса пустой бутылки приблизительно равна  $m_0 = 0,5$  кг. Нальем в нее воды столько, чтобы почти полностью заполнить основную цилиндрическую часть. При этом масса воды будет такой же, как и бутылки:  $m_{\text{в}} = 0,5$  кг. Одной рукой возьмем бутылку за горлышко и будем держать ее над пустым открытым ведром. Затем, размахнувшись, резко ударим по горлышку мягкой подушкой ладони другой руки... Дно бутылки и ее нижняя часть вместе с водой окажутся в ведре, а верхняя часть бутылки с охватываемым горлышком – в сухой руке. Весьма эффектное зрелище!

Теперь попробуем все это осмыслить и сделать количественные оценки.

Главным результатом опыта является разбитое стекло, имеющее довольно большую толщину (порядка нескольких миллиметров). Чтобы разбить такое стекло, нужно создать довольно большие силы. Откуда они берутся?

Представим себе письменный стол, покрытый толстым прозрачным стеклом. Пусть на стекле лежит стальной упругий шарик массой  $m = 100$  г. На шарик действуют две силы: сила притяжения  $m\vec{g}$ , приложенная в центре шарика, и сила реакции поверхности стола  $\vec{F}_p$ , равная силе притяжения по величине, но противоположно направленная и приложенная в месте касания поверхностей шарика и стола. Непосредственно к поверхности

стекла в том же месте касания приложена сила давления  $\vec{F}_d$  со стороны шарика, равная (согласно третьему закону Ньютона) по величине силе реакции, но противоположная ей по направлению. Таким образом, в месте касания на стекло действует сила давления

$$F_d = F_p = mg = 0,1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ Н}.$$

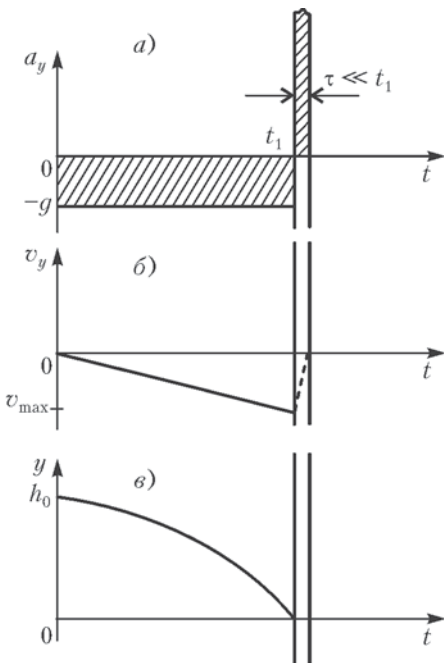


Рис. 1

Этой силы явно недостаточно, чтобы разрушить стекло на столе. Однако если шарик поднять над поверхностью стола сантиметров на двадцать и отпустить, то он, ударившись, несомненно разобьет стекло.

Рассмотрим процесс подробнее (рис.1). Направим ось  $y$  вверх над поверхностью стекла и изобразим графически зависимости ускорения, скорости и высоты шарика от времени. Особенно выделим отрезок времени удара  $\tau$ , в течение которого шарик взаимодействует со стеклом. Как известно, при свободном падении ускорение шарика  $a_y = -g$ , скорость  $v_y = -gt$  и высота  $y =$

$= h_0 - gt^2/2$ . Для рассматриваемого случая  $h_0 = 20$  см, время падения  $t_1 = \sqrt{2h_0/g} = 0,2$  с, максимальная скорость  $v_{\max} = gt_1 = \sqrt{2gh_0} = 2$  м/с.

Оценим время  $\tau$  соударения шарика с поверхностью стекла. Разрушение стекла наступает при некоторой величине деформации его поверхности в месте контакта. На основании опытных данных можно принять в качестве таковой величину  $\delta = 0,1$  мм  $= 10^{-4}$  м. Значение скорости за время удара изменяется от  $v_{\max}$  до нуля, откуда время удара равно  $\tau = \delta/(v_{\max}/2) = 10^{-4}$  с (здесь считается, что скорость линейно падает со временем). Мы

получили, что  $\tau$  приблизительно в тысячу раз меньше времени падения  $t_1$ . Легко понять, что два заштрихованных прямоугольника на рисунке 1,а имеют одну и ту же площадь, равную

$$v_{\max} = gt_1 = \sqrt{2gh_0}.$$

Изменение скорости в течение времени  $\tau$  (мы имеем в виду абсолютно неупругий удар, потому что стекло разрушится еще при его сжатии) тоже равно  $v_{\max}$ , а значит, связанное с этим среднее ускорение (замедление)  $\bar{a} = v_{\max}/\tau = 10^3 g$  окажется приблизительно в тысячу раз больше  $g$  – вот это «перегрузка»! Таким образом, на графике ускорения высота положительного пика, отвечающего величине  $\bar{a}$ , будет в тысячу раз выше  $g$ .

Теперь оценим силу удара шарика по стеклу. Она тоже будет в тысячу раз больше силы тяжести:

$$F_{\text{уд}} = m\bar{a} = \frac{mgt_1}{\tau} \approx 10^3 \text{ Н}.$$

Это уже вполне ощутимая величина.

Силы, действующие во время удара, называют «мгновенными» силами. В процессе удара, длящегося очень малое время  $\tau$ , они резко увеличиваются от нуля до некоторого максимума, а затем снова падают до нуля. Под силами удара можно понимать среднее значение мгновенных сил за малое время удара, так чтобы выражение  $F_{\text{уд}}\tau = m\Delta v$  представляет собой изменение импульса тела за это время (величину  $F_{\text{уд}}\tau$  называют импульсом силы).

Уже давно было известно: чтобы получить «выигрыш» в силе, можно использовать рычаг. Нужно выбрать его точку опоры так, чтобы малая сила  $F_m$  имела большое плечо  $l_6$ , а «выигрышная» большая сила  $F_6$  – малое плечо  $l_m$ . При этом  $F_6 = F_m l_6 / l_m$ . В этом смысле удар является своеобразным рычагом – временным рычагом. Малая сила в течение большого времени  $t_1$  разгоняет шарик, а огромная сила удара  $F_{\text{уд}}$  за малое время  $\tau$  останавливает его, причем  $F_{\text{уд}} = mgt_1/\tau \approx mg \cdot 10^3$ . Можно образно сказать, что в нашем случае получен «выигрыш» в силе в тысячу раз.

Отметим еще одно важное свойство удара. При соударении очень жестких тел, для которых деформации можно считать бесконечно малыми, т.е.  $\delta \rightarrow 0$ , скорости изменяются на конечные величины:  $\Delta v \sim v$ . Оценка же времени удара  $\tau \approx \delta/v$  даст бесконечно малую величину:  $\tau \rightarrow 0$ . Из второго закона Ньютона, записанного в виде  $m\Delta v = F_{\text{уд}}\tau$ , видно, что произведение  $F_{\text{уд}}\tau$  является величиной конечной. Значит,  $F_{\text{уд}} \rightarrow \infty$ , т.е. вели-

чина ударной силы велика, и по сравнению с ней можно пренебрегать всеми другими конечными силами, действующими во время удара (например, силой тяжести).

Итак, теперь самое время вернуться к эксперименту с бутылкой.

Для того чтобы стекло бутылки лопнуло у ее дна, необходимо по этому дну хорошо ударить. Но чем? Рукой? Нет, потому что рукой произвести удар такой силы невозможно. К тому же, мы ударили рукой по горлышку – казалось бы, должно разбиться горлышко. Остается предположить, что этот удар по дну произвела вода, содержащаяся в бутылке. Но для этого нужно сначала воду «приподнять» от стеклянного дна на некоторую высоту и затем предоставить ей возможность «упасть» на него. Ведь вода несжимаема, и ее соударение с бутылкой напоминает удар тяжелого упругого шарика о стекло. Получается, что нужно ударить по горлышку с такой силой, чтобы ускорение бутылки было больше ускорения массы воды – только тогда между водой и дном бутылки сможет образоваться пустой объем, в котором давление будет близко к нулю. Затем после удара по горлышку, который длится малое время, происходит мощное «схлопывание» воды и бутылки под действием атмосферного давления. Соударение между водой и бутылкой происходит за очень малое время и, как мы уже отмечали, приводит к очень большим разрушающим силам и давлениям.

Проведем необходимые количественные оценки. Прежде всего поставим главный вопрос: какова минимальная величина силы удара по горлышку, достаточная для того, чтобы оторвать воду от дна бутылки? Для этого рассмотрим основные действующие силы. На воду сверху действует сила атмосферного давления  $F_a^B = p_a S$ , где  $S$  – сечение основной цилиндрической части бутылки. Будем считать, что  $p_a = 10^5$  Па, а  $S = \pi r^2 = 30$  см<sup>2</sup> (это соответствует значению радиуса  $r \approx 3,1$  см); тогда  $F_a^B = 300$  Н. Под действием этой силы вся масса  $m = 0,5$  кг приобретет ускорение

$$a_B = \frac{F_a^B}{m} = 600 \text{ м/с}^2 = 60g.$$

На бутылку действуют следующие силы: сверху на горлышко действует сила нашего удара  $F$ , а снизу на дно бутылки действует сила атмосферного давления  $F_a^G = p_a S = 300$  Н. Для того чтобы бутылка приобрела ускорение больше, чем вода (масса бутылки приблизительно равна массе воды), нужно, чтобы выполнялось



неравенство

$$F - F_a^6 > F_a^B ,$$

т.е. сила нашего удара должна быть больше удвоенной силы атмосферного давления:

$$F > F_a^6 + F_a^B = 2F_a = 600 \text{ Н} .$$

Рассмотрим теперь подробнее первую фазу процесса – удар по горлышку. Допустим, что мы немного превысили величину минимальной необходимой силы и ударили с силой  $F_1 = 650 \text{ Н}$ . Тогда бутылка будет иметь ускорение

$$a_{6_1} = \frac{F_1 - F_a}{m} = 700 \text{ м/с}^2 = 70g ,$$

а вода получит ускорение

$$a_{B_1} = \frac{F_a}{m} = 60g .$$

Будем считать, что время удара порядка сотой доли секунды, т.е.  $\tau_1 = 10^{-2} \text{ с}$ , и оценим толщину вакуумного слоя  $\Delta h$ , т.е. расстояние, на которое разойдутся бутылка и вода:

$$\Delta h = \frac{\Delta a \tau_1^2}{2} = \frac{10g \tau_1^2}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5 \text{ мм} .$$

При этом вода и бутылка приобретут следующие скорости:

$$v_{B_1} = 60g \tau_1 = 6 \text{ м/с} ,$$

$$v_{6_1} = 70g \tau_1 = 7 \text{ м/с} .$$

После прекращения действия внешней силы (т.е. по истечении времени  $\tau_1$ ) начинается вторая фаза процесса. Теперь на бутылку будет действовать только сила атмосферного давления, направленная вверх, которая сообщит бутылке ускорение

$$a_{6_2} = -\frac{p_a S}{m} = -60g .$$

Это ускорение будет замедлять движение бутылки:

$$v_{6_2} = v_{6_1} - |a_{6_2}| t ,$$

вода же будет продолжать движение с ускорением

$$a_{B_2} = a_{B_1} = +60g$$

и скоростью

$$v_{B_2} = v_{B_1} + v_{a_2} t .$$

Столкновение между водой и бутылкой произойдет еще через

время  $\tau_2$ , за которое расстояние между ними сократится от  $\Delta h$  до нуля:

$$\tau_2 = \frac{v_{6_1} - v_{B_1}}{2a_B} + \sqrt{\frac{(v_{6_1} - v_{B_1})^2}{(2a_B)^2} + \frac{\Delta h}{a_B}}.$$

Оценку для этого времени получим из соотношения  $\Delta h = \frac{\Delta a \tau_2^2}{2}$ , где  $\Delta a = a_{B_2} - a_{6_2} = 2a_B = 120g$ :

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2\Delta h}{2a_B}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Затем оценим значения скоростей воды и бутылки непосредственно перед их столкновением:

$$v_{B_2} = v_{B_1} + a_{B_2} \tau_2 = 7,8 \text{ м/с},$$

$$v_{6_2} = v_{6_1} - |a_{6_2}| \tau_2 = 5,2 \text{ м/с}.$$

Получается, что вода догоняет бутылку и, ударяя, действительно может разбить ее.

Оценим теперь, какие силы и давления будут возникать непосредственно при соударении – это уже третья фаза процесса. Будем считать удар абсолютно неупругим (разрушение стекла) и его характерное время равным  $\tau_3 = 10^{-4}$  с (как для шарика на стекле). Тогда изменение импульса каждого тела будет равно

$$m\Delta v = m \left( v_{B_2} - \frac{v_{B_2} + v_{6_2}}{2} \right) = m \left( \frac{v_{B_2} - v_{6_2}}{2} \right) = 0,65 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

а сила удара –

$$F_{\text{уд}} = \frac{m\Delta v}{\tau_3} = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Давление у дна бутылки при этом составит

$$p = \frac{F_{\text{уд}}}{S} = \frac{6,5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 22 \text{ атм}$$

– весьма впечатляющая величина! Поскольку толщина стекла боковой поверхности бутылки обычно меньше, чем толщина дна (а «где тонко, там и рвется»), разрушение стекла происходит именно на боковой поверхности бутылки вблизи ее дна.

Подобно рисунку 1, на рисунке 2 представлен графически весь процесс в течение суммарного времени  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ , которое имеет порядок сотой доли секунды. На всю систему (бутылку с водой общей массой  $m = m_B + m_6 = 1 \text{ кг}$ ) подействовал импульс

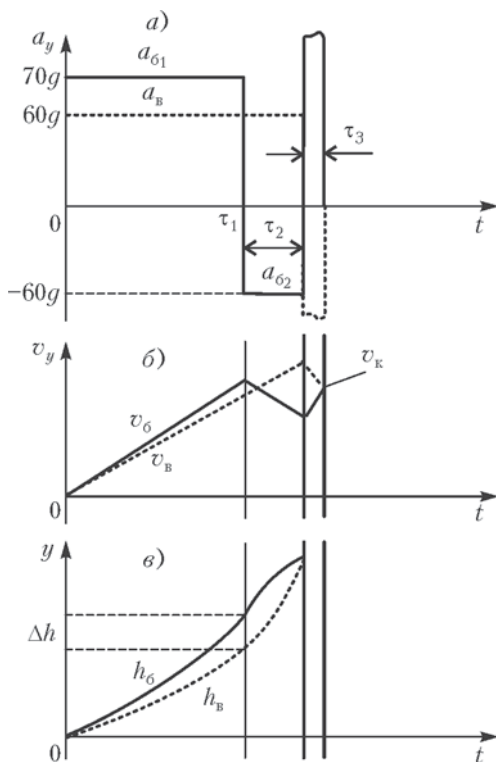


Рис. 2

ударной силы

$$F_1 \tau_1 = 650 \text{ Н} \cdot 10^{-2} \text{ с} = 6,5 \text{ Н} \cdot \text{с} .$$

В результате после окончания процесса, т.е. после неупругого удара со скоростью  $v_K = (v_{B_2} + v_{\delta_2})/2 = 6,5 \text{ м/с}$  , получен импульс

$$mv_K = 1 \text{ кг} \cdot 6,5 \text{ м/с} = 6,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с} .$$

Видно, что имеет место равенство

$$F_1 \tau_1 = mv_K .$$

Случайно ли это? Конечно, нет! Ведь силы атмосферного давления действуют здесь отдельно на воду и на бутылку, а в общей системе бутылки с водой они уничтожают друг друга, и остается только внешняя сила.

## УДИВИТЕЛЬНЫЕ КАТКИ

Б.Коган

Представьте себе доску, которая движется на круглых катках (сейчас опять в моду вошли самокаты – *прим. ред.*). При этом она сохраняет горизонтальное положение и остается на одной и той же высоте. Почему это происходит? Да потому, что окружность имеет одну и ту же ширину при любом повороте.

А будет ли доска двигаться так же, если воспользоваться некруглыми катками? В первый момент кажется, что это невоз-

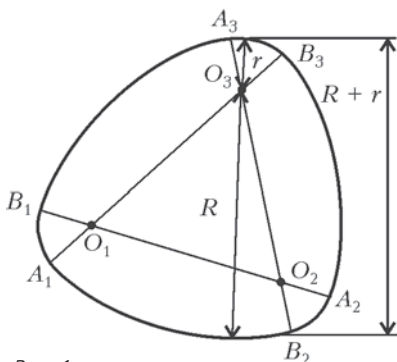


Рис. 1

можного. Не будем, однако, спешить. Оказывается, есть кривые, которые, подобно окружности, имеют одинаковую ширину во всех направлениях. Они так и называются: линии одинаковой ширины.

Одна из простейших кривых такого рода показана на рисунке 1. Она состоит из дуг  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  радиусом  $r$  и дуг  $B_1A_3$ ,  $B_3A_2$ ,  $B_2A_1$  радиусом  $R$ , центры которых находятся в вершинах правильного треугольника  $O_1O_2O_3$ . Легко видеть, что ширина этой кривой одинакова во всех направлениях и равна  $R + r$ . Следовательно, катки, профили которых очерчены по таким кривым (рис.2), будут работать ничуть не хуже круглых.

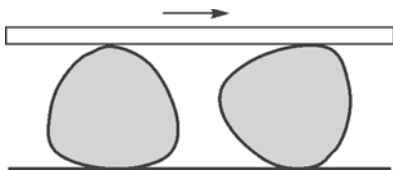


Рис. 2

Кривую, изображенную на рисунке 1, можно получить так. Возьмем отрезок  $A_1B_3$  и, повернув его на  $60^\circ$  вокруг точки  $O_1$ , переведем

в положение  $B_1A_2$ . Затем, повернув отрезок  $B_1A_2$  на  $60^\circ$  вокруг точки  $O_2$ , получим отрезок  $A_3B_2$  и, наконец, повернув отрезок  $A_3B_2$  на  $60^\circ$  вокруг точки  $O_3$ , вновь придем к отрезку  $A_1B_3$ . В процессе этих поворотов один конец рассматриваемого отрезка опишет дугу  $A_1B_1A_3B_3$ , а другой – дугу  $B_3A_2B_2A_1$ . Следовательно, кривую, показанную на рисунке 1, можно рассматривать как траекторию, описываемую концами некоторого отрезка при трех поворотах вокруг точек, лежащих на этом отрезке.

Пользуясь этим методом, можно получить много кривых подобного рода. Например, кривая, показанная на рисунке 3,

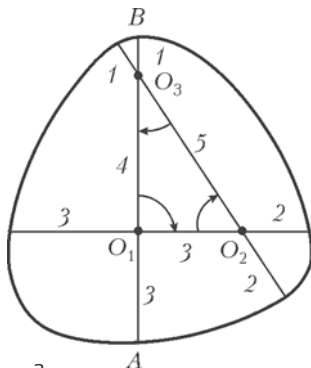


Рис. 3

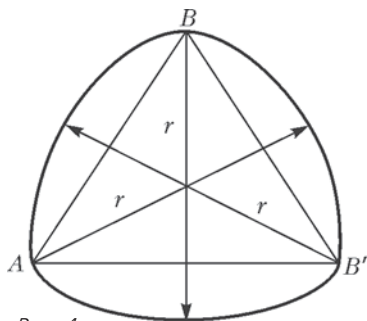


Рис. 4

образуется в результате поворотов отрезка  $AB$  вокруг центров  $O_1, O_2, O_3$ . Величина и направление каждого поворота показаны стрелками. Цифры на рисунке показывают длины соответствующих отрезков. Ширина всех этих кривых постоянна и равна длине поворачиваемого отрезка.

Можно поворачивать отрезок вокруг одного из его концов. Так мы получим простейшую кривую равной ширины, отличную от окружности (рис.4). При этом отрезок  $AB$  поворачивается сначала вокруг точки  $A$ , переходя в положение  $AB'$ , затем вокруг точки  $B'$ , переходя в отрезок  $B'B$ , и, наконец, вокруг точки  $B$ , замыкая кривую.

Рассмотрим теперь некоторый отрезок  $AB$ . Пусть он катится без скольжения по кривой  $SS$  (рис.5). Тогда в каждый отдельный момент такое движение можно рассматривать как вращение отрезка относительно точки касания. Точка касания, относительно которой в данный момент совершается поворот, называется мгновенным центром вращения. В нашем случае – это точка  $C$ . Представление о мгновенном центре вращения позволяет легко вычислять скорости различных точек отрезка  $AB$ . Например,

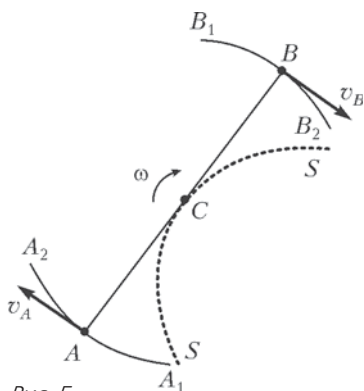


Рис. 5

для скоростей точек  $A$  и  $B$  будем иметь

$$v_A = \omega \cdot CA, \quad v_B = \omega \cdot CB,$$

где  $\omega$  — угловая скорость отрезка  $AB$  в его мгновенном вращении вокруг центра  $C$ . При этом скорости рассматриваемых точек будут перпендикулярны соответствующим радиусам вращения, т.е. отрезкам  $CA$  и  $CB$ . Таким образом можно вычислить скорость любой точки, лежащей на этом отрезке или жестко связанной с этим отрезком.

Если, например, с отрезком  $AB$  жестко связана некоторая фигура, то скорость любой ее точки  $P$  равна произведению  $\omega \cdot CP$ .

Вернемся теперь к кривым постоянной ширины. Пусть отрезок  $AB$  катится по кривой  $SS$ . Так как скорости  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$  перпендикулярны радиусам  $CA$  и  $CB$ , то они параллельны между собой. Но скорость  $\vec{v}_A$  направлена по касательной к траектории точки  $A$ , а скорость  $\vec{v}_B$  — по касательной к траектории точки  $B$ . Следовательно, эти касательные параллельны друг другу, и расстояние между ними все время остается равным  $AB$ . Но это значит, что траектории  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  можно рассматривать как участки некоторой кривой постоянной ширины.

Однако нам нужно построить не два участка, а всю такую кривую. Если мы хотим сделать это с помощью описываемой операции, то должны выбрать линию  $SS$  так, чтобы, обкатывая

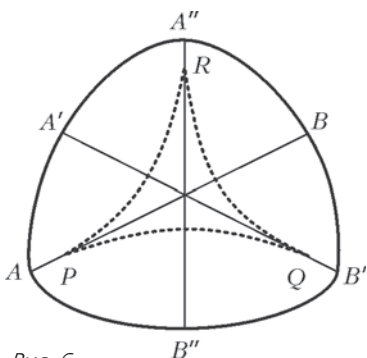


Рис. 6

ее, отрезок  $AB$  повернулся на  $180^\circ$ , т.е. чтобы точка  $A$  пришла в положение  $B$ , а точка  $B$  — в положение  $A$ . Одна из таких линий —  $PQR$  — показана на рисунке 6. Проследим более подробно, как отрезок  $AB$  обкатывает ее. Сначала он катится по участку  $PQ$  и приходит в положение  $A'B'$ , при этом его концы описывают дуги  $AA'$  и  $BB'$ . Затем он катится по участку  $QR$ , и его концы описыва-

ют дуги  $A'A''$  и  $B'B''$ . Наконец, он обкатывает участок  $RP$ , а его концы движутся по дугам  $A''B$  и  $B''A$ . В результате точка  $A$  приходит в положение  $B$ , а точка  $B$  — в положение  $A$ , и кривая постоянной ширины замыкается. При этом дуги  $PQ$ ,  $QR$  и  $RP$  могут иметь любую форму и не обязательно должны быть одинаковыми. Единственное, что от них требуется, это чтобы они были выпуклыми и касались друг друга так, как это показано на рисунке 6. Что касается отрезков  $AP$  и  $PB$ , то их длина не может быть произвольной, ибо тогда дуга, описываемая точкой  $A$ , не воляется в дугу, описываемую точкой  $B$ . Здесь можно поступить следующим образом. Проведем через точку  $P$  прямую, касающуюся дуги  $PQ$ , и поставим на ней точку  $A$ . Заставим теперь эту прямую обкатывать линию  $PQRP$ . Тогда конец дуги, которую опишет при этом точка  $A$ , определит положение точки  $B$ .

Линия  $PQRP$ , показанная на рисунке 6, состоит из трех дуг. Но число дуг может быть и большим. Например, на рисунке 7 изображена кривая постоянной ширины, полученная при обкатывании линии  $PQRSTP$ , состоящей из пяти дуг.

Кривые постоянной ширины обладают еще одним свойством, роднящим их с окружностью: периметр кривой постоянной ширины равен приблизительно  $l = \pi D$ , где  $D$  — ширина этой кривой. Действительно, пусть горизонтальная прямая  $PQ$  перемещается с помощью катков постоянной ширины (рис.8). Рассмотрим один из этих катков, например левый. Пусть его ширина  $D$ , а периметр  $l$ . Когда прямая  $PQ$  передвигается настолько, что этот каток сделает один оборот, он сместится относительно прямой  $MN$  на расстояние  $l$

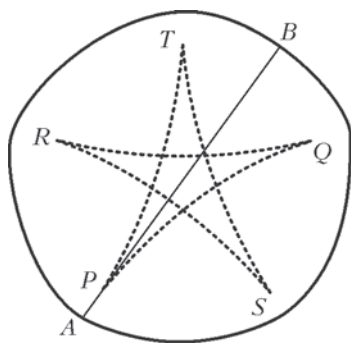


Рис. 7

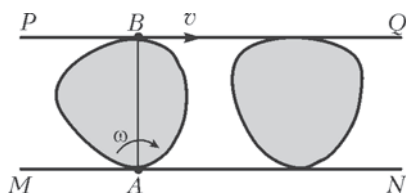


Рис. 8

вправо. А так как он катится не только по прямой  $MN$ , но и по прямой  $PQ$ , то после одного оборота он окажется смещенным относительно прямой  $PQ$  на расстояние  $l$  влево. Следовательно, перемещение прямой  $PQ$  относительно прямой  $MN$  будет равно  $2l$ . А поскольку это же смещение равно  $vt$ , где  $t$  — время, за

которое каток делает один оборот, то

$$2l = vt.$$

(Мы считаем, что прямая  $PQ$  движется с постоянной скоростью.) Мгновенный центр вращения катка находится в точке  $A$ , значит, скорость перемещения равна

$$v = \omega \cdot AB = \omega D,$$

где  $\omega$  — угловая скорость катка. Тогда

$$2l = \omega Dt.$$

Но  $\omega t$  есть угол поворота катка за один оборот, следовательно,

$$\omega t = 2\pi, \text{ и } 2l = 2\pi D,$$

откуда

$$l = \pi D.$$

Таким образом, периметр кривой постоянной ширины вычисляется так же, как периметр окружности.

А какова площадь, ограниченная кривой постоянной ширины? Можно ли ее вычислять так же, как площадь круга? Оказывается, нет. Однако площадь кольца постоянной ширины можно вычислять как площадь кольца между двумя концентрическими окружностями.

Рассмотрим кривую постоянной ширины. Через произвольную точку на ней проведем нормаль (нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной) и отложим вдоль нее отрезок заданной длины. Отложив такие отрезки от каждой точки данной кривой, получим новую кривую, являющуюся геометрическим местом концов отложенных отрезков. Очевидно, она тоже будет иметь постоянную ширину. При этом площадь, заключенная между этими кривыми, будет равна разности площадей фигур, ограниченных наружной и внутренней кривыми. Попробуйте доказать это самостоятельно.



## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВСЕМИРНОГО ПОТОПА

*В.Вышинский, А.Стасенко*

Речь пойдет о делах серьезных и весьма давних. Конечно, и в наши дни происходили наводнения в Европе, которые повредили и Праге, и Дрезденской галерее, и Предкавказью... Но в истории Человечества было наводнение, которое оставило память на тысячи лет. Вот что читаем в Книге «Бытие»:

*«...разверзлись все источники великой бездны, и окна небесные отворились; и лился на землю дождь сорок дней и сорок ночей... так что покрылись все высокие горы, какие есть под всем небом. На пятнадцать локтей поднялась над ними вода, и покрылись горы. Вода же разливалась на земле сто пятьдесят дней.*

*...и навел Бог ветер на землю, и воды остановились. И закрылись источники бездны и окна небесные...*

*Вода же постепенно возвращалась с земли и стала убывать вода по окончании ста пятидесяти дней».*

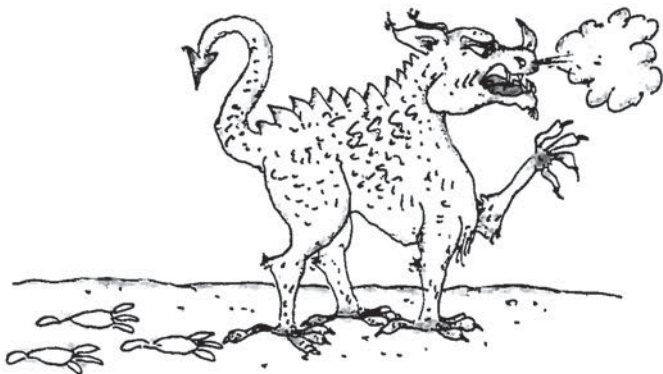
И все это время патриарх Ной (или Ут-Напишти, по вавилонской традиции), предупрежденный загодя Богом, сидел в заранее построенном большом ковчеге (сто лет строил!) со своей семьей и автономным подсобным хозяйством.

И еще читаем:

*«И остановился ковчег в седьмом месяце, в семнадцатый день месяца, на горах Араратских. Вода постепенно убывала до десятого месяца; в первый день десятого месяца показались верхи гор».*

Можно ли по этим данным реконструировать численные параметры событий? Задачи такого класса называются обратными или некорректно поставленными. Это не означает, что они плохие. Просто имеет место недостаток входной информации, а решать надо. Рисунок 1 наглядно демонстрирует различие между прямой и обратной задачами. И в современном физическом эксперименте такие задачи не редки, так что математики развили целую теорию решения обратных задач. (Приятно напомнить, что тут важнейшую роль сыграла русская школа академика А.Н.Тихонова.)

Прямая задача: описать след известного дракона



Обратная задача: описать дракона по его следу



Рис. 1

Попробуем и мы («тихо и разумно...») сделать некоторые физические оценки давно прошедшего события.

Итак, дождь шел сорок суток. Примем для оценок, что это был ливень, при котором плотность воды в воздухе порядка  $\hat{\rho} \sim 5 \text{ г/м}^3$ , а радиус капель  $a \sim 3 - 5 \text{ мм}$ . Такие капли падают со скоростью  $u \sim 10 \text{ м/с}$ . Значит, плотность потока воды была порядка

$$\hat{\rho} u \sim 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с} = 0,05 \text{ кг/}(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

За все время  $t_d$  такого дождя на каждый квадратный метр пришлось количество воды

$$\hat{\rho} u t_d \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ кг/}(\text{м}^2 \cdot \text{с}) \cdot 40 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ кг/м}^2,$$

что при плотности воды  $\rho_v = 10^3 \text{ кг/м}^3$  дало глубину  $h_d \approx 200 \text{ м}$ . Не мало!

Это, скорее всего, оценка сверху. А теперь получим оценку снизу.

*«И продолжалось на земле наводнение сорок дней, и умножилась вода и подняла ковчег, и он возвысился над землею».*

Если всплытие ковчега произошло в сороковой день, то глубина наводнения в этот момент не могла превышать высоту ковчега в «тридцать локтей». Поскольку древнееврейский локоть равен 44 см, а древневавилонский 49 см, это даст высоту ковчега порядка 13–15 м. Таким образом, даже чудовищного ливня, который, пожалуй, на порядок сильнее современного, явно было недостаточно, чтобы затопить «горы Араратские». Тут нужна была помощь Океана. И Бог открыл не только «хляби небесные», но и «хляби земные» — «источники бездны».

Уже слой воды толщиной 10–200 м, образовавшийся от ливня, создал давление на земную кору от одной до десятков атмосфер. Сравним с чем-нибудь. Известно, что во время тайфунов давление воздуха в его центральной части («глаз тайфуна») несколько уменьшается. И даже это небольшое уменьшение (по сравнению с нашей оценкой давления дождевой воды) на больших площадях приводит к разгрузке земной коры, потере ее устойчивости и землетрясениям. Значит, под действием катастрофического ливня одна из тектонических платформ (под Междуречьем) могла опуститься; соседние, возможно, поднялись (кстати, это могло способствовать удержанию прибывающих облаков, как любой горный хребет не пропускает «тучки небесные, вечные странницы»). Так и сказано в писании: «Яко толща земли проседая на земли». Но как мудро все было устроено: сначала шел обильный, но спокойный дождь — для того, чтобы ковчег (довольно громоздкий ящик, построенный едва ли с учетом теории упругости и сопротивления материалов) плавно оторвался от стапеля и «возвысился над землей», а затем пришла паводковая волна с океана, боковой удар который мог бы разрушить это сооружение.

А что же дальше? К сожалению, нам не известно, по какому закону (в зависимости от времени) опускалась суша. Но, поскольку ковчег оказался в конце концов на Кавказе (а о ветре пока не упоминается), разумно предположить, что океанские воды хлынули из Персидского (ныне) залива и погнали ковчег на северо-запад. А от древнего Ура, где жил Ной и все передовое человечество, до Арарата порядка тысячи километров. Правда, ковчег не сразу прибыл туда. Сто пятьдесят дней его тащило куда-то к норд-весту, как сказал бы современный моряк. И тут прибытие воды остановилось. Подул ветер. Конечно, едва ли

поверхностный ветер мог быть причиной остановки потока воды глубиной несколько километров. Но не случайно же эти два события указаны как одновременные. И если обитателям ковчега даже только показалось, что ветер остановил поток, значит, он подул с северо-запада (рис.2). А на самом деле ковчег остановиться мог потому, что навстречу с норд-веста шел такой же

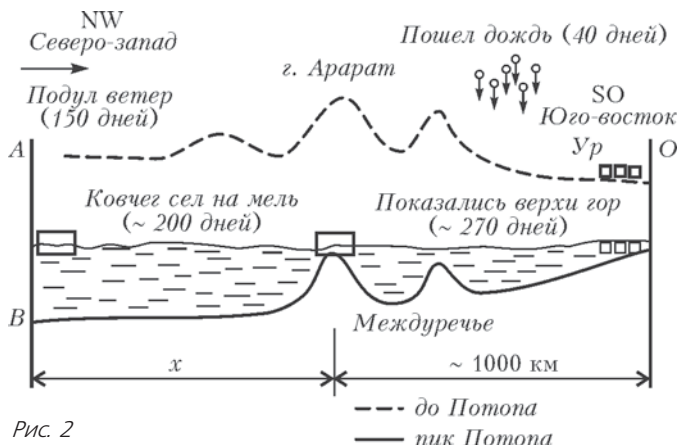


Рис. 2

паводок, так что вертикальная плоскость  $AB$  оставалась неподвижной.

И только примерно через 200 дней после начала Потопа ковчег «остановился на горах Араратских», хотя суши еще нигде не было видно, т.е. он сел на мель. Значит, более полутора месяцев норд-вест гнал его назад, к зюйд-осту.

Конечно, если бы мы знали форму ковчега, его осадку, скорость ветра, коэффициент сопротивления,.. то можно было бы рассчитать и его траекторию. Но такие сведения даются только великим святым в состоянии «умной молитвы и божественного созерцания». Мы же продолжим приблизительные численные оценки.

Наибольшее расстояние между Тигром и Евфратом, которое, по-видимому, и определяло масштабы расселения тогдашнего «всего Человечества», составляет приблизительно 300 км. Поэтому можно предположить, что хлынувший поток имел ширину порядка сотни километров (так говорят физики, когда не знают точно, была ли эта ширина 70 или 400 км). Тут-то и пора воскликнуть: вот это паводок! И приступить к его простенькой теории.

Прежде всего зададимся вопросом: какова была средняя скорость ковчега? Если «паводковая вода» с океана прибывала

150 – 40 = 110 суток и за это время ковчег прошел на NW мимо Арарата приблизительно  $(1000 + x)$  км, то его средняя скорость «туда» равна

$$v_1 = \frac{1000 + x}{110} \frac{\text{км}}{\text{сутки}},$$

а «обратно», под ветром (до посадки на мель на Арарате) –

$$v_2 = \frac{x}{50} \frac{\text{км}}{\text{сутки}}.$$

Если принять эти скорости одинаковыми (а почему нет?), то получим

$$x \approx 1000 \text{ км}.$$

Значит, ковчег проскочил примерно вдвое дальше, чем расстояние Ур–Арарат. (Если кто-нибудь знает точнее, может сообщить в редакцию «Кванта».) Следовательно, средняя скорость ковчега равна

$$v \approx v_1 \approx v_2 \approx 20 \text{ км/сутки} \approx 0,2 \text{ м/с}.$$

А каков должен быть средний секундный расход воды из океана, чтобы за 110 дней заполнить, например, бассейн (см. рис.2) с поперечным сечением  $OAB$ , где  $OA \sim 2000$  км,  $AB \sim 5$  км. (Современная высота Арарата над уровнем современного океана составляет 5165 м, но для оценок такие отличия не существенны – тем более, что мы собираемся пренебречь и глубиной наполнения от дождя, которую оценили выше:  $10 \leq h_d \leq 200$  м.) Объем этого бассейна, в расчете на его «ширину» в  $1 \text{ м}_\perp$ , перпендикулярную рисунку 2, равен

$$\frac{1}{2} AB \cdot OA \sim \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2000 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{м}_\perp = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{м}_\perp.$$

Таким образом, «скорость наполнения» была порядка

$$\frac{5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{м}_\perp}{110 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 500 \text{ м}^3/(\text{с} \cdot \text{м}_\perp).$$

(При таком расходе воды ванна шириной порядка  $0,5 \text{ м}_\perp$  и объемом порядка  $0,5 \text{ м}^3$  наполнилась бы за 2 миллисекунды.)

Оценим теперь потенциальную энергию этого объема воды (тоже в расчете на ширину в  $1 \text{ м}_\perp$ ):

$$\begin{aligned} E_{\text{п}} &= \frac{AB}{2} \rho_v V_1 g = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ м}}{2} \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{м}_\perp \cdot 10 \text{ м/с}^2 = \\ &= 12,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}_\perp \end{aligned}$$

(здесь  $\rho_v$  – плотность воды). В справочниках можно найти так называемый тротиловый эквивалент: 2 кг этого взрывчатого вещества «обладают» энергией  $10^7$  Дж. Тогда найденная потенциальная энергия потока составляет  $25 \cdot 10^9$  кг тротила/м $_{\perp}$ , или 25 Мт тротила/м $_{\perp}$ . При ширине потока  $b \sim 100$  км =  $10^5$  м (см. выше) получим полную потенциальную энергию

$$E_{\pi} = E_{\pi_1} \cdot b \sim 2,5 \cdot 10^6 \text{ Мт тротила,}$$

что эквивалентно многим тысячам современных самых мощных 100-мегатонных бомб. Поистине, «вздохи» Земли были титаническими.

Впрочем, не бойтесь нового потопа, ибо апостол Петр обещал, что в следующий раз «земля и все дела на ней сгорят». И тогда будет «новая земля и новое небо».

## Приложения

1. Рассчитаем скорость капли дождя. В установившемся режиме (при постоянной скорости падения) сила тяжести капли уравнивается силой сопротивления воздуха. Последняя же, как известно, пропорциональна квадрату скорости движения  $u$ , площади поперечного сечения  $\pi a^2$  и плотности окружающей среды (воздуха)  $\rho_{\text{воз}}$ , т.е. пропорциональна  $Ku^2\pi a^2\rho_{\text{воз}}$ , где  $K$  – безразмерный коэффициент, равный для сферы приблизительно  $1/4$ . Итак,

$$\rho_v \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 g = \frac{1}{4} \rho_{\text{воз}} \pi a^2 u^2,$$

откуда получаем

$$u = 4 \sqrt{\frac{\rho_v a g}{3 \rho_{\text{воз}}}} = 4 \sqrt{\frac{10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot (3-5) \cdot 10^{-3} / 2 \text{ м} \cdot 10 \text{ м/с}^2}{3 \cdot 1 \text{ кг/м}^3}} = 10 \text{ м/с.}$$

(Для радиуса капли приняты значения  $a = (3-5)/2$  мм, плотность воздуха  $\rho_{\text{воз}} = 1 \text{ кг/м}^3$ .)

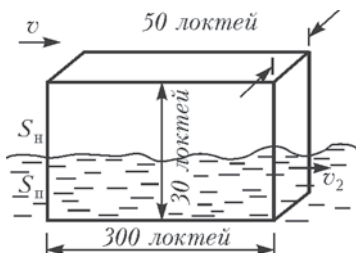


Рис. 3

2. Использованная формула для силы сопротивления среды движущемуся в ней телу позволяет оценить и скорость  $v$  ветра, который гнал ковчег к Арарату. Пусть площадь поперечного сечения подводной части ковчега  $S_{\pi}$ , надводной  $S_{\pi}$  (рис.3). Запишем условие равенства силы сопротивления

воды и «тянущей» силы ветра (вода считается неподвижной):

$$\rho_{\text{в}} S_{\text{п}} v_2^2 \approx \rho_{\text{воз}} S_{\text{н}} v^2$$

(тут мы заранее предполагаем, что  $v \gg v_2$ ). Отсюда находим

$$v \approx v_2 \sqrt{\frac{\rho_{\text{в}} S_{\text{п}}}{\rho_{\text{воз}} S_{\text{н}}}}.$$

Полагая  $S_{\text{п}} = S_{\text{н}}$  (ковчег наполовину погружен в воду), получим

$$v \approx v_2 \sqrt{\frac{10^3}{1}} \approx 30 v_2,$$

что при упомянутом выше значении  $v_2 \approx 0,2$  м/с дает

$$v \approx 6 \text{ м/с}.$$

Нормальный ветер...

## КАК ЛЕТАТЬ: ДАЛЬШЕ ИЛИ ТИШЕ?

*А.Стасенко*

Хорошо, когда есть выбор, но с чем он связан для крылатых летательных аппаратов (самолетов, птиц)? Попробуем разобраться.

На тело, движущееся в воздухе, действует аэродинамическая сила. Что ж тут удивительного? Ведь «аэро» означает воздух, а «динамис» – сила. Но найти эту силу теоретически очень непросто.

Понятно, что при горизонтальном полете с постоянной скоростью  $v$  ее можно представить в виде векторной суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих: вертикальной  $\vec{F}_y$ , называемой подъемной силой и по величине в точности равной весу  $\vec{P}$ , и горизонтальной  $\vec{F}_x$ , которая называется силой сопротивления и должна уравниваться силой тяги двигателей  $\vec{T}$  (рис.1,а).

Далее, легко проверить, что обе эти составляющие пропорциональны произведению  $\rho v^2 l c$ , где  $\rho$  – плотность воздуха,  $l c$  – площадь крыла самолета (рис.1,б и в). (Проверьте, по крайней мере, что размерность этого произведения есть ньютон.) Но «пропорциональны» совсем не значит «равны». Любому конструктору самолета хочется, чтобы  $F_x$  была поменьше: ведь тогда и мощность двигателя  $N = F_x v$  (значит, и запас горючего) потребуется меньше. Поэтому качество летательного аппарата характеризуют отношением

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{P}{T}.$$

Для современных крылатых летательных аппаратов оно порядка 10–20. Это означает, что две составляющие аэродинамической силы «качественного» летательного аппарата заметно различимы по величине.

Еще на заре авиации, около сотни лет назад, ученые пытались понять, как «устроены» эти силы. И вот что придумали.



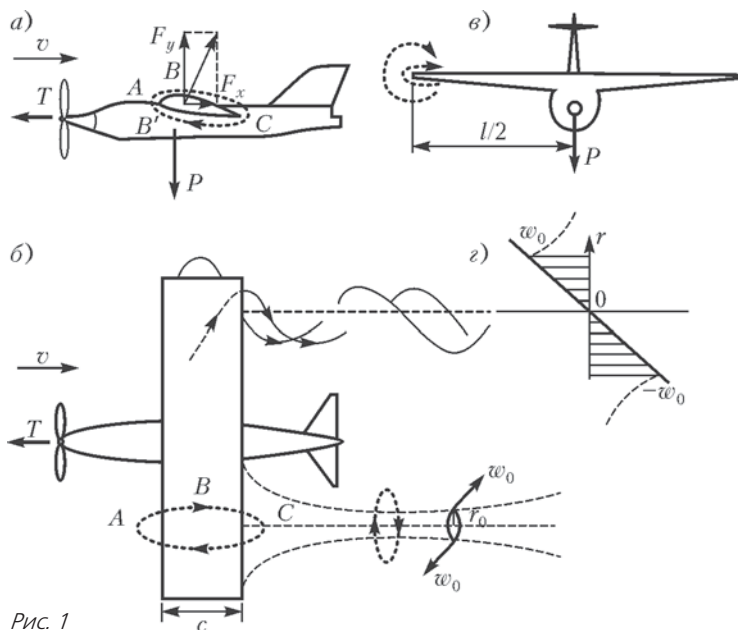


Рис. 1

Одна из самых изящных идей состоит в том, что подъемная сила крыла связана с так называемой циркуляцией  $\Gamma$ :

$$F_y = \Gamma v l. \quad (1)$$

Сравнивая с записанным выше выражением для  $F_y$ , видим, что  $\Gamma \sim v c$ . Немного еще о циркуляции. Когда вода сливается в отверстие ванны, часто образуется вихрь с выделенным направлением вращения (по часовой стрелке или против нее), такой, что на окружности радиусом  $r$  скорость воды  $w(r)$  одна и та же. Если умножить эту скорость на длину окружности, мы и получим то, что называется циркуляцией:

$$\Gamma = 2\pi r w. \quad (2)$$

Во время полета самолета за его крылом образуются два вихря. Действительно, самолет держится в воздухе за счет того, что его крыло, образно говоря, «дует вниз», т.е. создает поток импульса, равный весу летательного аппарата. Масса воздуха, отклоненная вниз, должна вернуться на свое место сверху (см. рис.1,б), но поскольку за время этого возвращения самолет улетает вперед, то она совершает винтовое движение в системе координат, связанной с самолетом.

Одно из объяснений подъемной силы таково (см. рис.1,*а* и *б*). Масса набегающего воздуха разделяется крылом на две части. Одна из них проходит над крылом путь  $ABC$ , больший, чем путь  $AB'C$  той части, которая проходит под крылом. Если мы умножим значение скорости в каждой точке пути  $ABCB'A$  на небольшой участок этого пути и потом все это сложим (в пределе проинтегрируем), то и получим циркуляцию  $\Gamma$ . Значит, крыло родило вихрь. А поскольку вихрь в газе или жидкости не может нигде закончиться (разве что замкнуться на себя или на твердую стенку – так называемая теорема Гельмгольца), то с двух концов крыла будут сбегать спутные вихри (см. рис.1,*б*), которые на большом удалении могут

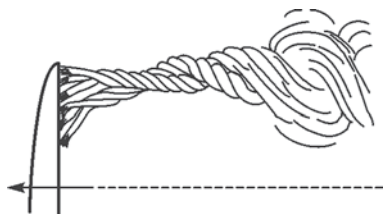


Рис. 2

образовать эллиптические кольца – понаблюдайте за следом самолета в чистом небе. (В частности, еще в 1907 году один из зарубежных аэродинамиков – Ланчестер – очень наглядно изобразил процесс сворачивания вихревой пелены крыла; см. рис.2.)

Приятно отметить, что зависимость подъемной силы от циркуляции (1) связана с именем русского профессора Николая Егоровича Жуковского.

А что же сопротивление, т.е. горизонтальная составляющая аэродинамической силы? Прежде всего, оценим так называемое индуктивное сопротивление  $F_{xi}$ , связанное со спутными вихрями. Представим себе вихрь в виде стержня (см. рис.1,*б*) радиусом  $r_0$ , на поверхности которого окружная (линейная) скорость равна  $w_0$  (а движением воздуха вокруг вихря пренебрежем). Тогда кинетическая энергия единицы объема воздуха в вихре равна  $\frac{\rho w_0^2}{2} \cdot \frac{1}{2}$  (здесь коэффициент  $\frac{1}{2}$  появляется потому, что мы предположили линейную зависимость окружной скорости от радиуса – см. рис.1,*з*; но это не важно для дальнейшего). Далее, самолет, пролетая в единицу времени расстояние, равное  $v$ , порождает вихревой объем  $2 \cdot \pi r_0^2 v$  (так как вихрей – два). А для этого требуется мощность

$$F_{xi}v = \frac{\rho w_0^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi r_0^2 v.$$

Следовательно, сила индуктивного сопротивления равна (см.

также (1) и (2))

$$F_{xi} = \frac{\rho \omega_0^2}{2} \pi l_0^2 = \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi} = \frac{P^2}{8\pi \rho v^2 l^2} = \frac{\alpha}{v^2},$$

где в  $\alpha$  входят все характеристики данного самолета (вес, площадь крыла...). Из последнего выражения видно: чем больше скорость полета, тем меньше индуктивное сопротивление, и наоборот. Поэтому при посадке большой самолет порождает мощные вихри над аэродромом, опасные для следующих за ним летательных аппаратов.

Подчеркнем еще раз, что индуктивное сопротивление связано с циркуляцией спутных вихрей. Ведь даже если подъемная сила и, следовательно, циркуляция равны нулю (например, для пикирующего штурмовика), то сопротивление воздуха все равно существует. Это так называемое профильное сопротивление  $F_{xp}$ . Оно пропорционально  $\rho v^2 S_{\perp}$ , где  $S_{\perp}$  – лобовое сечение движущегося тела. Видно, что профильное сопротивление тоже связано с квадратом скорости:

$$F_{xp} = \beta v^2.$$

Запишем теперь сумму этих двух видов сопротивления:

$$F_x = \frac{\alpha}{v^2} + \beta v^2.$$

Качественный вид этих зависимостей показан на рисунке 3,а. В частности, легко показать, что суммарное сопротивление достигает минимального значения, когда обе его составляющие равны друг другу, откуда

$$v = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ и } F_{x \min} = 2\sqrt{\alpha\beta}.$$

Значит, если мы хотим пролететь как можно дальше, нужно обеспечить равенство профильного и индуктивного сопротивлений в течение всего полета. При этом нужна мощность двигателей

$$N(F_{x \min}) = 2\sqrt{\alpha\beta} \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Но, может быть, наша мощность ограничена? Тогда нужно постараться лететь с наименьшей мощностью. Следовательно, нужно найти минимум функции (рис.3,б)

$$N = F_x v = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3.$$

Можно показать, что ему соответствует скорость  $v = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{3\beta}}$ . При

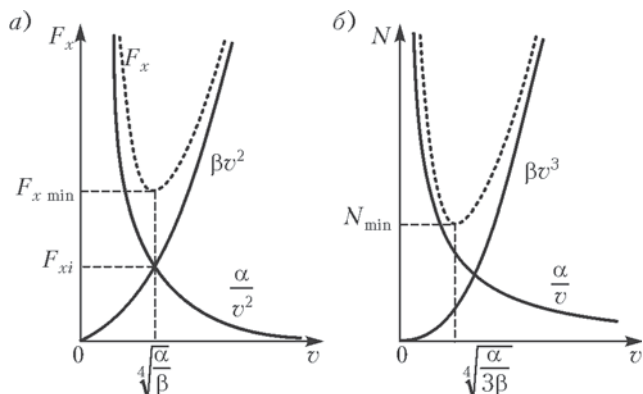


Рис. 3

этом индуктивное сопротивление составляет уже не половину (как в первом случае), а три четверти от суммарного сопротивления. Подставив найденное значение скорости в формулу для  $N$ , получим

$$N_{\min} = \left( \sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} \right) \sqrt{\alpha\beta} \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Отношение мощностей в двух рассмотренных случаях составит

$$\frac{N_{\min}}{N(F_{x \min})} = \frac{3^{1/4} + 3^{-3/4}}{2} \approx 0,87.$$

По-видимому, эти 13% и незначительны для птиц и двигателей.

Так что «думайте сами, решайте сами», как сказано в одной хорошей песне.

## ДЕЛО – ТРУБА

*В.Дроздов*

Как-то зимой я услышал в «последних известиях» уже не удивляющее сообщение о лопнувших отопительных системах, что и послужило импульсом к написанию этой статьи.

Зададимся вопросом: реально ли создать стальную трубу, которая не лопнет при замерзании в ней воды? Заметим, что работники жилищно-коммунального хозяйства говорят почему-то наоборот: разморозить трубы. Видимо, таков их профессиональный термин.

Допустим, что вода в трубе все же замерзла. Физически ясно, что относительное линейное удлинение  $\varepsilon$  льда и трубы одно и то же. Поскольку плотность воды равна  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ , а плотность льда составляет  $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$  (при нормальном атмосферном давлении), то относительное увеличение объема льда будет равно  $\frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$ . Так как труба длинная и цилиндрическая, а расширение носит радиальный характер, то должно выполняться равенство

$$\frac{\pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{1}{9},$$

где  $R$  – радиус трубы,  $\Delta R$  – его увеличение. Отсюда легко получаем

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

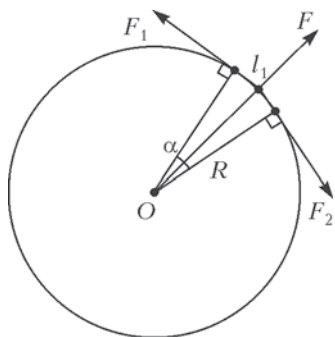
Согласно закону Гука, возникшее при замерзании воды механическое напряжение в стальной стенке трубы равно

$$\sigma = \varepsilon E,$$

где  $E = 200 \text{ ГПа}$  – модуль Юнга для стали. Получаем  $\sigma = 11 \text{ ГПа}$ , что значительно больше, чем предел прочности стали на разрыв  $\sigma_{\text{пр}} = 0,60 \text{ ГПа}$ . Следовательно, если уж вода в трубе замерзнет, то последняя неизбежно лопнет, что и подтверждается печальными «опытами». (Конечно, это только оценка по порядку величин)

ны, поскольку при расчетах не учитывались различные превходящие обстоятельства, например увеличение плотности льда по мере роста внешнего давления.)

Если же сделать трубу толстой, это ничего не даст даже в случае, когда трещины, в которые углубится лед, дойдут не до конца. Труба при этом утратит прочность и в следующий раз при замерзании воды непременно лопнет. Но самое главное, что



толстая труба будет и дорогой, и тяжелой. Ну а расчет толстой трубы весьма сложен (он ближе к сопромату, чем к чистой физике). Рассчитать же тонкую трубу, толщина которой  $h \ll R$ , можно и в рамках школьного курса физики.

Свяжем величины  $R$  и  $h$  с давлением в трубе  $p$  и механическим напряжением в стенке трубы  $\sigma$ . Мысленно выделим малый участок трубы, опирающийся на достаточной малый центральный угол

$\alpha$  (см. рисунок). Поскольку этот участок трубы находится в равновесии, сумма сил, действующих на него, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = 0.$$

Здесь  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  — силы, растягивающие выделенный участок трубы соседними участками,  $\vec{F}$  — сила давления льда на участок. Проецируя векторное равенство на направление силы  $\vec{F}$ , получим

$$F_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + F_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + F = 0. \quad (*)$$

Из соображений симметрии следует, что  $F_2 = F_1$ . Если труба имеет длину  $l$ , то

$$F_2 = F_1 = \sigma hl, \text{ а } F = pS,$$

где  $S = ll_1$  — площадь рассматриваемого участка. Из формулы (\*) выводим последовательно

$$-2F_1 \sin \frac{\alpha}{2} + F = 0,$$

$$-2\sigma hl \sin \frac{\alpha}{2} + pll_1 = 0,$$

$$-2\sigma hl \sin \frac{\alpha}{2} + pR\alpha = 0.$$

При малых углах  $\alpha$  (а  $\alpha$  действительно можно представлять сколь угодно малым) справедливо приближенное равенство  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ . Следовательно,

$$\alpha(-\sigma h + pR) = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{h}{R}.$$

А теперь можно ответить вот на какой интересный вопрос: начиная с какой температуры возникает опасность разрушения трубы? Из справочника (см. «Справочник по физике» А.С.Еноховича) возьмем фрагмент таблицы «Температура плавления некоторых веществ при различном давлении  $p$ », относящийся ко льду:

$t, ^\circ\text{C}$	0	-1	-5	-10	-20
$p, \text{МПа}$	0,1	13	61	113	197

Примем, что трубу с отношением  $h/R = 0,15$  еще можно считать тонкой. Тогда, полагая  $\sigma = \sigma_{\text{пр}} = 0,60 \text{ ГПа}$ , получим  $p = 90 \text{ МПа}$ . Это означает, что трубе грозит разрыв уже при переходе от  $-5^\circ\text{C}$  к  $-10^\circ\text{C}$ . Но трубы обычно быстро зашлакуются, т.е. забиваются, если они не совсем новые, – ведь через них циркулирует отнюдь не дистиллированная вода. Учесть это количественно не представляется возможным, хотя ясно, что зашлакованная труба выдержит несколько больший мороз – поскольку воды в ней меньше. Реальная жизнь показывает, что переход от  $-10^\circ\text{C}$  к  $-20^\circ\text{C}$  для трубы с замерзающей водой «смертелен». Так что не надо «размораживать» батареи!

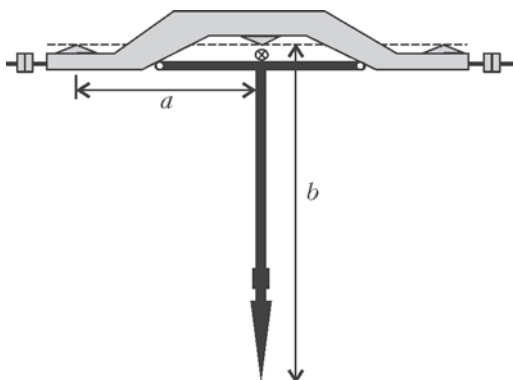
## РЫЧАЖНЫЕ ВЕСЫ

*С.Варламов*

Кажется, что может быть проще, чем рычажные равноплечие весы? Опора, коромысло да две чашки. Однако говорят, что есть весы точные и грубые, чувствительные и не очень.

Что такое чувствительность весов? Это способность коромысла изменить свое положение – повернуться на заметный невооруженным глазом угол – при изменении величины груза на одной из уравновешенных чашек. Чем меньший груз вызывает заметный поворот коромысла, тем выше чувствительность весов. Минимальная масса, вызывающая такой заметный поворот, является количественной характеристикой чувствительности весов. Например, школьные рычажные весы обычно имеют чувствительность 10 миллиграмм, при этом конец стрелки, прикрепленной к коромыслу, смещается относительно опоры (или шкалы, размещенной на опоре) на расстояние порядка 1 миллиметра.

Чтобы сделать хорошие, т.е. чувствительные, весы и обеспечить независимость их чувствительности от массы измеряемого груза, нужно выполнить ряд условий (см. рисунок).





*Первое условие.* Коромысло с грузом, уравновешенным набором гирь, или без груза должно иметь положение устойчивого равновесия. Это обеспечивается тем обстоятельством, что центр масс коромысла (на рисунке он изображен крестиком в кружочке) находится ниже, чем линия опоры коромысла на подпятник (ось вращения коромысла).

*Второе условие.* Мгновенная ось вращения коромысла не должна перемещаться относительно подставки. Это достигается выполнением опоры коромысла в виде хорошо заточенной призмы. Опоры чашек на коромысло тоже выполняются в виде заточенных призм, исходя из тех же соображений: оси вращения чашек не должны перемещаться относительно коромысла. При малой площади контакта опоры и подпятника (того места, на которое опирается призма) давление на материал подпятника и на материал самой призмы становится больше.

*Третье условие.* Подпятники и призмы не должны деформироваться при наличии нагрузки на коромысло. Для этого призмы и подпятники изготавливаются из материалов, обладающих высокой твердостью. В ход идут рубины, алмазы и более дешевые, но твердые материалы.

*Четвертое условие.* Чувствительность весов не должна зависеть от наличия на чашках уравновешенных грузов. Это обеспечивается конструктивной особенностью весов: мгновенные оси вращения чашек относительно коромысла должны находиться на одинаковом расстоянии от оси вращения коромысла относительно подставки (равноплечие рычажные весы) и, кроме того, все эти три оси должны находиться в одной плоскости. Если это условие выполнено, то любые одинаковые грузы, лежащие на разных чашках, создают относительно оси вращения коромысла суммарный момент сил тяжести, равный нулю. Причем этот момент сил остается равным нулю при любом повороте коромысла относительно подставки весов. Это означает, что положение равновесия коромысла не нарушится, если на обе чашки весов положить одинаковые грузы. И при любых величинах уравновешенных грузов поочередное помещение на каждую из чашек некоторого перегрузка вызовет поворот коромысла на один и тот же угол. Это и соответствует независимости чувствительности весов от груза на чашках.

Заметим, что от суммарной массы грузов зависит период колебаний весов около положения равновесия – чем больше масса, тем больше период. Если, например, суммарная масса грузов на чашках весов равна массе коромысла, то период колебаний возрастает примерно вдвое по сравнению с периодом

колебаний без грузов на чашках. (Проверьте это самостоятельно и постарайтесь объяснить.)

Для регулировки весов используются несколько пар гаек на стержнях с резьбой, прикрепленных к коромыслу. Перемещение гаек на концах коромысла позволяет изменять положение центра масс по горизонтали. Одна из пар гаек перемещается вдоль стрелки, прикрепленной к коромыслу, и обеспечивает изменение расстояния от оси вращения коромысла до центра масс коромысла.

А теперь рассмотрим школьные равноплечие весы. Пусть масса их коромысла  $M = 200$  г, расстояние от оси вращения каждой из чашек до оси вращения коромысла  $a = 20$  см, а расстояние от оси вращения коромысла до кончика стрелки, прикрепленной к коромыслу,  $b = 20$  см. Обсудим три конкретные задачи.

**Задача 1.** *Предположим, что весы настроены так, что перегрузок массой  $m = 10$  мг на одной из чашек весов вызывает поворот коромысла к новому положению равновесия, причем конец стрелки смещается относительно подставки весов на  $l = 1$  мм. Каково расстояние  $x$  от центра масс коромысла до оси его вращения?*

Угол поворота коромысла небольшой:  $\alpha = l/b$ . Плечо силы тяжести  $Mg$ , действующей на коромысло, равно  $x\alpha = xl/b$ . Момент силы тяжести коромысла относительно оси вращения коромысла равен  $Mgxl/b$ . Этот момент уравнивается моментом силы тяжести перегрузки относительно той же оси вращения, равным  $mga$ :

$$\frac{Mgxl}{b} = mga.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{mab}{Ml} = 2 \text{ мм}.$$

**Задача 2.** *Пара гаек, обеспечивающих настройку весов, имеет массу 1 г. Куда и на какое расстояние нужно переместить гайки, чтобы чувствительность весов стала равной 5 мг?*

Масса коромысла 200 г, центр масс находится на расстоянии 2 мм от оси вращения, перемещение гаек должно сократить расстояние между осью вращения и центром масс до 1 мм (это следует из предыдущей задачи). Следовательно, пару гаек массой 1 г нужно переместить вверх на расстояние 200 мм.

**Задача 3.** Коромысло с чашками без грузов имеет положение равновесия, при котором стрелка отклонена от середины шкалы вправо на 10 мм. Пара регулировочных гаек имеет массу 1 г и в данный момент находится на расстоянии 20 см справа от оси вращения коромысла. В какую сторону и на какое расстояние нужно передвинуть регулировочные гайки, чтобы стрелка в положении равновесия находилась точно в середине шкалы?

Очевидно, что гайки, обозначим их массу  $m_r$ , следует передвинуть вправо. Это перемещение  $\Delta L$  должно привести к изменению момента силы тяжести относительно оси вращения коромысла на величину, равную моменту сил, возникающему при помещении на чашку весов перегрузка массой  $m = 100$  мг (мы воспользовались результатами задачи 1):

$$m_r g \Delta L = m g a ,$$

откуда получаем

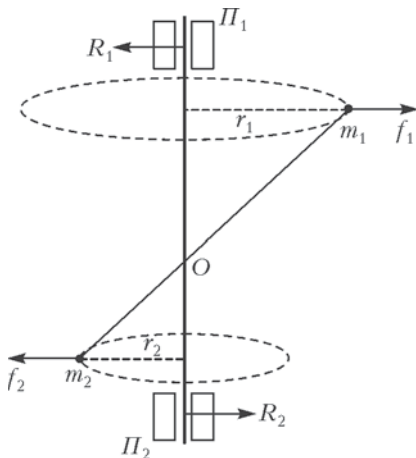
$$\Delta L = \frac{ma}{m_r} = 2 \text{ см} .$$

## ПОЧЕМУ КУВЫРКАЕТСЯ КНИГА?

*В.Ланге*

Для начала предлагаем вам провести такой нехитрый опыт. Возьмите в руки книгу, обвязав ее шнурком, чтобы не раскрывалась при движении, или прямоугольную картонную коробку. Если вы подбросите книгу (или коробку), сообщив ей одновременно вращательное движение вокруг короткого или длинного ребра, то во время подъема и падения ось вращения будет оставаться параллельной первоначальному направлению. Однако все попытки сохранить ось вращения неизменной у книги, подброшенной с вращением вокруг среднего ребра, окажутся тщетными – в этом случае книга во время движения будет беспорядочно кувыркаться.

Этот опыт всегда удается и неизменно вызывает интерес у зрителей. Можно даже поспорить со зрителями, что никому не удастся бросить книгу без кувыркания, и объявить приз (который так и останется невостребованным). А вот если вас заинтересует объяснение такого поведения книги, вам придется проявить терпение и внимание, знакомясь со следующим далее текстом.



Назовем оси вращения, сохраняющие в отсутствие внешних сил свое направление в пространстве, свободными. Возможность их существования вытекает из несложных, но несколько громоздких рассуждений. Пусть два точечных тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся на концах весьма легкого (чтобы не учитывать его массу) стержня, скрепленного в точке  $O$  с осью, способной вращаться в под-

шипниках  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (см. рисунок). При вращении системы с угловой скоростью  $\omega$ , с точки зрения наблюдателя во вращающейся системе координат, на концы стержня будут действовать центробежные силы инерции, равные

$$f_1 = m_1 \omega^2 r_1 \text{ и } f_2 = m_2 \omega^2 r_2.$$

Эти силы стремятся, во-первых, повернуть ось вращения в направлении, указанном стрелками сил, и, во-вторых, переместить систему в сторону большей по модулю силы. Разумеется, этому препятствуют подшипники, действующие на ось с силами  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$ , уравнивающими силы  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$ .

Однако ось вращения не будет менять своего направления и без подшипников, если алгебраическая сумма моментов сил  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  относительно точки  $O$  окажется равной нулю и при этом будет равна нулю алгебраическая сумма самих этих сил. Первое условие реализуется, когда ось вращения перпендикулярна оси стержня, так как в этом случае плечи обеих сил относительно точки  $O$  равны нулю. Второе условие выполняется, если

$$m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2, \text{ или } \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Стало быть, любая ось, проходящая через центр масс системы двух точечных тел перпендикулярно соединяющему их невесомому стержню, окажется свободной.

Рассмотрим далее систему из шести масс  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ , укрепленных на концах трех чрезвычайно легких стержней, которые пересекаются попарно под прямыми углами в такой точке  $O$ , что расстояния тел от нее удовлетворяют условиям

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad m_3 r_3 = m_4 r_4, \quad m_5 r_5 = m_6 r_6,$$

т.е. центр масс системы совпадает с точкой  $O$ . При вращении вокруг любого стержня алгебраическая сумма центробежных сил инерции и их моментов будут равны нулю, так что эти стержни являются свободными осями. А вот любая другая ось уже не будет свободной.

Можно показать, что в каждом теле существуют только три взаимно перпендикулярные свободные оси, проходящие через центр масс тела. Их называют главными осями инерции. У однородного прямоугольного параллелепипеда (как наша книга или коробка) они проходят через центры противоположных граней.

Если тело приведено во вращение вокруг одной из главных

осей и внешние воздействия отсутствуют, то направление оси вращения в пространстве должно оставаться неизменным. Однако закрутить тело абсолютно точно вокруг главной оси практически невозможно, к тому же неизбежные случайные толчки сразу же нарушают это движение. Поэтому длительное вращение вокруг свободной оси можно наблюдать только в том случае, когда при небольших отклонениях от этого движения появляются силы, возвращающие тело к вращению вокруг главной оси.

В отсутствие внешних сил устойчивым оказывается вращение лишь вокруг оси, которой соответствует наибольшее или наименьшее значение момента инерции. Главная же ось, соответствующая промежуточному моменту инерции, является неустойчивой, поскольку при любом случайном отклонении от заданного вращения возникают силы, увеличивающие это отклонение. Именно это явление и наблюдается в опытах с кувыркающейся книгой.

Если вращение не абсолютно свободно (существуют силы трения или оказывает влияние сила тяжести), то устойчивой обычно оказывается одна главная ось, которой соответствует наибольший момент инерции. Это можно продемонстрировать, например, с помощью палочки, подвешенной на нити к оси центробежной машины: при постепенном увеличении скорости вращения наступает момент, когда палочка поднимается, переходя из вертикального положения (которому соответствует наименьший момент инерции) практически в горизонтальную плоскость (т.е. палочка вращается вокруг главной оси с наибольшим моментом инерции).

«Предпочтение», оказываемое вращающимся телом свободным осям с наибольшим моментом инерции, используется в технике. Чтобы нагрузки на подшипники были минимальными, нужно, как мы видели, возможно точнее совместить ось вращения со свободной осью тела. Однако абсолютно точно сделать это нельзя. Поэтому в машинах с большой частотой вращения применяются гибкие, или самоцентрирующиеся, валы. В нормальном режиме они изгибаются так, чтобы вращение происходило как раз вокруг свободной оси.

## КАК СТУДЕНТ ОГОРОД ПОЛИВАЛ

*А.Стасенко*

Как-то раз, давным-давно, попросила бабушка внука-студента огород полить. И шланги были, и воду компрессором подали – да вот в чем закавыка: Студент был умный да еще вычитал, что «уже в 450 году до нашей эры Кратет высказал мнение о необходимости сначала постепенной, а потом и полной замены ручного труда... автоматами». Опустил он буйну голову на широку грудь, а в груди была дума крепкая. Вспомнил он сегнерово колесо и представил себе трубку с концами, отогнутыми в противные стороны, да насаженную на другую трубу, подающую воду, причем та, что первая, могла свободно вращаться за счет реакции вытекающей струи.

Ввел Студент обозначения (рис.1) и снова задумался. Если  $v_b$  – скорость движения воды внутри трубки с площадью сечения  $S$ , то секундный расход воды через одно отверстие равен  $Q = \rho_b v_b S$ . А так как жидкость несжимаема и, значит, ее плотность  $\rho_b$  постоянна, то при постоянной величине  $S$  скорость воды одинакова в любом сечении трубки. (Тут Студент почувствовал, что он применил закон сохранения массы.) Если в результате выброса воды трубка длиной  $2l$  приобрела угловую скорость  $\omega$ , то линейная (окружная) скорость ее концов будет равна  $\omega l$  и направлена противоположно скорости движения воды, так что в системе координат, связанной с огородом, скорость истечения воды будет равна по вели-

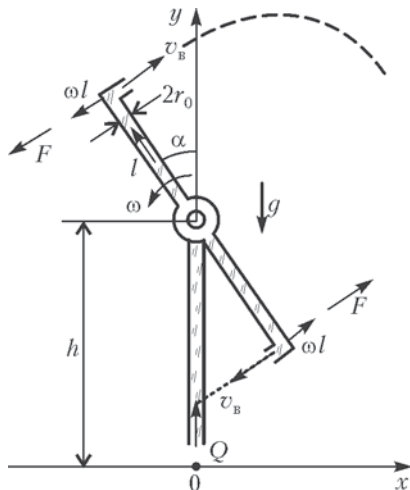


Рис. 1

чине  $v_0 = v_b - \omega l$ . Следовательно, поток импульса через одно отверстие равен  $Q(v_b - \omega l)$ , а его размерность есть  $\frac{\text{кг}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{Н}$ . Но ведь это же размерность силы  $F$ ! Таким образом, имеется пара сил – две равные по величине силы, параллельные и противоположно направленные, причем  $l$  – плечо каждой силы относительно оси вращения. В результате на трубку действует момент сил, равный

$$F \cdot 2l = 2Q(v_b - \omega l)l. \quad (1)$$

Но до какой угловой скорости может раскрутиться трубка? И вообще, мешает ли ей что-то неограниченно ускоряться во вращательном движении? Конечно. Ну например, момент сил трения во втулке (куда же деться от трения!), сопротивление воздуха... Уж очень хотелось Студенту сказать привычные слова «сопротивлением воздуха пренебречь», но как честный человек он решил прежде всего сделать численную оценку.

Ему давно было известно, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу пропорциональна квадрату скорости  $v$  тела относительно воздуха, площади поперечного сечения  $S_{\perp}$  тела и плотности воздуха  $\rho$ . Но чтобы ею пренебречь, нужно эту силу сравнить с какой-нибудь другой, которая предполагается существенно важной. Скажем, с потоком импульса массы воды, истекающей из трубки (в системе координат, связанной с самой трубкой), равным  $Qv_b$ :

$$\frac{\rho v^2 S_{\perp}}{Qv_b} \leq \frac{\rho \cdot (\omega l)^2 \cdot 2r_0 l}{\rho_b \pi r_0^2 v_b \cdot v_b} \sim \left( \frac{\rho}{\rho_b} \right) \left( \frac{\omega l}{v_b} \right)^2 \left( \frac{l}{r_0} \right).$$

Здесь для усиления неравенства взято наибольшее изменение скорости:  $v = \omega l$ , достигаемое на конце трубки, и, конечно, пренебрежено тем, что трубка при своем вращении увлекает в движение воздух. Итак, завершим оценку. Ясно, что  $\omega l$  не может превосходить  $v_b$  – иначе трубка не будет раскручиваться, отношение плотностей воздуха и воды  $\rho/\rho_b$  составляет приблизительно  $10^{-3}$ , и если взять трубку «разумных размеров», например  $l \sim 10$  см и  $2r_0 \sim 1$  см, то для искомого отношения двух сил получим величину порядка и менее  $10^{-2}$ . Значит, с точностью до процентов можно и в самом деле пренебречь сопротивлением воздуха.

Что же осталось? Осталось приравнять ускоряющий момент реактивной силы струи (1) тормозящему моменту  $M_{\text{тр}}$  силы трения:

$$2Q(v_b - \omega l)l = M_{\text{тр}}.$$



Отсюда получим скорость истечения воды из трубки (в системе координат, связанной с огородом):

$$v_0 = v_b - \omega l = \frac{M_{\text{тр}}}{2lQ}$$

(как и предполагалось выше,  $\omega l$  не превосходит скорости выброса воды относительно трубки).

А что дальше? А дальше, как говорят ученые, проблема свелась к известной школьной задаче о движении тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$  из точки с координатами (см. рис.1)

$$x_0 = -l \sin \alpha, \quad y_0 = h + l \cos \alpha.$$

Решение этой задачи дает

$$x = -l \sin \alpha + v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = h + l \cos \alpha + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

где  $t$  – время, прошедшее с момента выброса элементарной массы воды из трубки. Конечно, это решение предполагает, что элементы водяной струи или капли, образующиеся в результате дробления, никак не взаимодействуют друг с другом и с воздухом.

Для огорода очень важно, куда попадет вода и в каком количестве. В принятой нами системе координат ордината почвы  $y = 0$ . Обозначим абсциссу точки падения воды через  $x_{\downarrow}$ . Исключая из последних двух уравнений время, получим

$$x_{\downarrow} = -l \sin \alpha + \frac{v_0^2 \cos \alpha}{g} \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2} \left( 1 + \frac{l}{h} \cos \alpha \right)} \right). \quad (2)$$

В частности, здесь содержится хорошо известное выражение для дальности полета, соответствующее случаю вылета из начала координат ( $h = 0, l = 0$ ):

$$x_{0\downarrow} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha.$$

В этом случае наибольшая дальность полета достигается, как известно, при  $\alpha = 45^\circ$  и составляет

$$x_{0\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3)$$

В общем же случае решение, как видно из выражения (2), зависит от двух параметров: отношения начальных значений потенциальной и кинетической энергий  $a = \frac{gh}{v_0^2/2}$  и геометричес-

кого параметра нашего устройства  $\frac{l}{h}$ . И Студент с увлечением принялся анализировать эти зависимости – тем более, что у него был компьютер.

Мы же ограничимся каким-нибудь характерным случаем. Например, предположим, что  $l/h \ll 1$  (это означает, что вращающаяся трубка мала по сравнению с высотой ее над землей). Кроме того, предположим, что дальность полета  $x_{0\max}$  много больше  $l$ , т.е. даже при выбросе воды с нулевой высоты она улетит достаточно далеко. Тогда абсцисса точки падения воды на почву, отнесенная к характерной величине (3), равна

$$\bar{x} = \frac{x_{\downarrow}}{v_0^2/g} = \cos \alpha \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + a} \right).$$

Можно найти и угол вылета, соответствующий максимальной дальности, и величину самой этой дальности из условия равенства нулю производной:

$$\frac{d\bar{x}}{d\alpha} = 1 - 2\sin^2 \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + a}} (1 - 2\sin^2 \alpha - a) = 0,$$

откуда

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{1}{a+2}, \quad \bar{x}_{\max} = \sqrt{a+1}.$$

Видно, что чем выше точка вылета, тем более далекий участок огорода сможет достать вода и тем меньше будет угол, при котором достигается эта наибольшая дальность. Например, в случае  $a = 1$  (начальные значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы)

$$\alpha_m = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35^\circ,$$

а дальность полета в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем при вылете из точки на уровне земли (3).

На рисунке 2 приведен качественный вид зависимости относительной координаты точки падения воды на почву от угла  $\alpha$  (или от времени, поскольку  $\alpha = \omega t$ ). В верхней части рисунка показаны положения вращающейся трубки, соответствующие нескольким характерным углам. Уже из этого графика видна неравномерность полива. В нижней части этого же рисунка построен график функции  $|d\alpha/d\bar{x}|$ , характеризующей плотность распределения воды по поверхности почвы. Действительно, при повороте на угол  $d\alpha$  вода, выброшенная за соответствующий отрезок времени  $dt = d\alpha/\omega$ , попадает на участок  $d\bar{x}$  (считаем, что она тут же поглощается почвой). Видно, что в некоторые

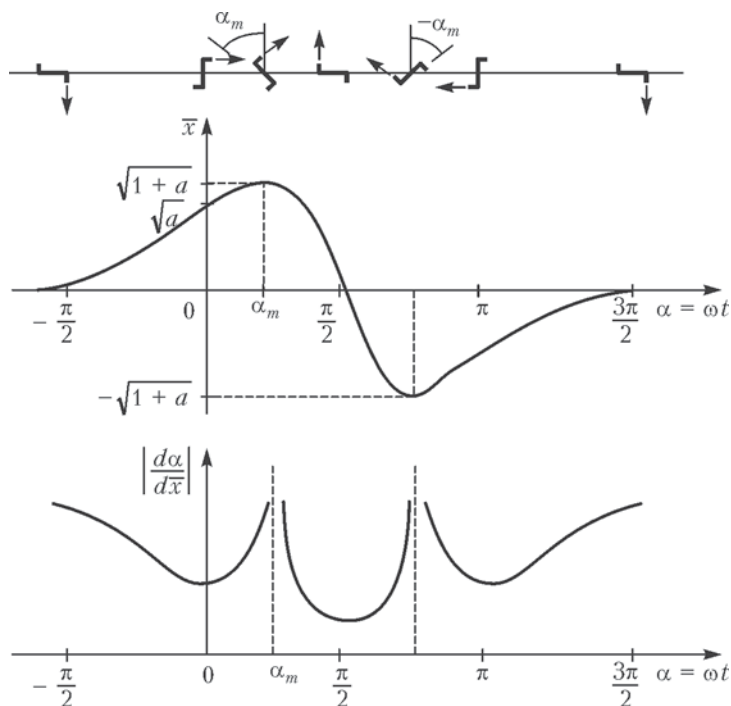


Рис. 2

моменты времени плотность полива обращается в бесконечность. И понятно почему – в эти моменты (при  $\alpha = \alpha_m$ ) струя воды, падающей на почву, на мгновение останавливается, меняя направление своего движения по поливаемой поверхности. А в изложенной теории струя считается бесконечно тонкой линией, несущей конечный расход воды.

«Но, – сказал себе Студент, – струя не линия, она уже на выходе из трубки имеет диаметр  $2r_0$ , а при дальнейшем движении еще может распадаться на капли, которые тормозятся в воздухе; и центробежная сила инерции может как-то изменить распределение давления по оси струи; и... следовательно, вся теория нуждается в проверке, доработке...» И много еще мыслей толпилось в голове Студента.

А что же огород? Спросите у бабушки...

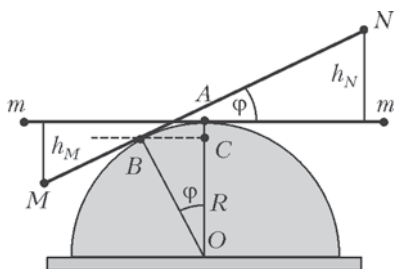
## ТАКИЕ ПРОСТЫЕ КАЧЕЛИ

*П.Хаджи, Л.Глазова, В.Личман*

Кто же не знает с детства качелей?! Самое простое – качаться, ухватившись за веревку (в физике это называется так: грузик массой  $m$  на невесомой нерастяжимой нити длиной  $l$  совершает колебания). Но одному скучно. А вот если у вас есть друг, легкая доска и бревно...

Рассмотрим такую модель качелей. Пусть жесткий невесомый стержень (легкая доска) длиной  $2L$  расположен на полуцилиндре (бревне) с радиусом  $R$  перпендикулярно его образующей (см. рисунок). К обоим концам стержня прикреплены точечные грузики массой  $m$  каждый (изобретательные, но очень маленькие мальчики). Стержень с грузиками может совершать малые колебания в вертикальной плоскости, перекачиваясь без проскальзывания по поверхности полуцилиндра. Определим частоту этих колебаний.

В положении равновесия, когда стержень располагается горизонтально, моменты сил тяжести грузиков относительно оси вращения  $A$  уравновешены. При отклонении от положения равновесия плечо силы тяжести правого грузика относительно новой оси вращения  $B$  увеличивается, а левого – уменьшается. В результате вращающие моменты этих сил не уравновешивают друг друга, и возникает нескомпенсированный вращающий момент, закручивающий стержень по часовой стрелке. Пройдя по инерции положение равновесия, стержень начинает вращаться в обратную сторону, т.е. против часовой стрелки, перекачиваясь без проскальзывания по поверхности полуцилиндра, снова возвращается в положение равновесия, затем отклоняется в другую сторону и т.д. Возникают периодические колебания стержня с



грузиками, которые характеризуются конкретной частотой (периодом) колебаний. Для определения этой частоты воспользуемся законом сохранения энергии.

Отклоним стержень от положения равновесия на небольшой угол  $\varphi$ , перекачивая его по поверхности полуцилиндра от точки  $A$  до точки  $B$ . Перпендикуляр  $OB$  к стержню в этом случае также поворачивается относительно своего первоначального положения на угол  $\varphi$ . Будем говорить о малых колебаниях. Критерием малости здесь является неравенство  $\varphi \ll 1$  (разумеется, если угол выражать в радианах).

Найдем потенциальную энергию грузиков относительно равновесного положения. При показанном на рисунке отклонении стержня левый грузик опускается на высоту  $h_M$ , а правый поднимается на высоту  $h_N$ , где

$$h_M = BM \sin \varphi + AC,$$

$$h_N = BN \sin \varphi - AC.$$

Из рисунка видно, что

$$AC = R - R \cos \varphi = 2R \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{R\varphi^2}{2}.$$

Длина участка стержня от точки  $B$  до точки  $N$  равна первоначальной длине  $L$  плюс длина дуги окружности  $AB$ , вдоль которой перекачивается стержень при колебаниях:

$$BN = L + R\varphi.$$

Аналогично,

$$MB = L - R\varphi.$$

Тогда высоты  $h_N$  и  $h_M$  можно выразить формулами

$$h_N = (L + R\varphi)\varphi - \frac{R\varphi^2}{2} = \left(L + \frac{R\varphi}{2}\right)\varphi,$$

$$h_M = (L - R\varphi)\varphi + \frac{R\varphi^2}{2} = \left(L - \frac{R\varphi}{2}\right)\varphi.$$

Следовательно, потенциальная энергия обоих грузиков при повороте стержня на угол  $\varphi$  относительно положения равновесия равна

$$E_{\text{п}} = mgh_N - mgh_M = mgR\varphi^2.$$

Если отклоненный от положения равновесия стержень предоставить самому себе, то благодаря возвращающему моменту сил он снова придет в положение равновесия, при этом грузики

будут иметь некоторую скорость. Определим кинетическую энергию системы при прохождении ею положения равновесия. Пусть стержень в этот момент вращается вокруг точки  $A$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Поскольку стержень относительно оси вращения располагается симметрично, линейные скорости  $v$  грузиков одинаковы и равны  $v = \Omega L$ , а кинетическая энергия обоих грузиков определяется выражением

$$E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m \Omega^2 L^2.$$

При качаниях стержня, имеющих гармонический характер, максимальная угловая скорость стержня  $\Omega$  выражается формулой  $\Omega = \omega \phi$ , где  $\omega$  – частота колебаний стержня. Поэтому

$$E_k = m \omega^2 L^2 \phi^2.$$

Полагая, что потенциальная энергия, запасенная стержнем при отклонении от положения равновесия, превращается полностью в кинетическую энергию, которую имеют грузики при прохождении ими положения равновесия (закон сохранения энергии), для частоты колебаний стержня с грузиками получаем следующее выражение:

$$\omega = \frac{\sqrt{gR}}{L}.$$

Отсюда следует, что частота колебаний наших качелей пропорциональна корню квадратному из радиуса полуцилиндра и обратно пропорциональна длине стержня. В частности, если радиус полуцилиндра равен нулю, частота колебаний также равна нулю. Действительно, в этом случае полуцилиндр представляет собой просто ось, на которую насажен стержень с грузиками одной и той же массы. Такая система находится в состоянии безразличного равновесия – поворот стержня в этих условиях на любой угол не приводит к изменению потенциальной энергии системы, и колебания возникнуть не могут.

## МАЯТНИК С НЕСКОЛЬКИМИ ГРУЗИКАМИ

*П.Хаджи, А.Михайленко*

Логическим и простейшим обобщением традиционного математического маятника является маятник с двумя или более грузиками. Такой маятник можно назвать частным случаем физического маятника.

Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть к жесткому невесомому стержню прикреплены два точечных тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  соответственно от точки подвеса (рис. 1, а). Найдем частоту колебаний такого маятника.

В положении равновесия стержень маятника располагается вертикально. Выведем маятник из положения равновесия, отклонив стержень с грузами на небольшой угол  $\varphi$  (рис. 1, б). Каждый из грузов при этом поднимется на определенную высоту относительно своего положения равновесия. Пер-

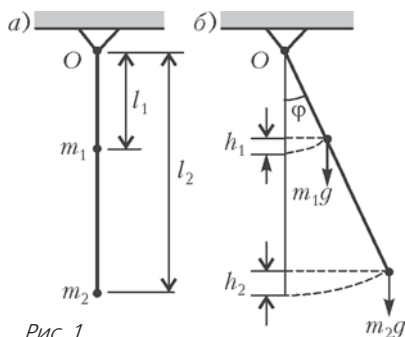


Рис. 1

вый поднимется на высоту  $h_1 = l_1(1 - \cos \varphi)$ , а второй — на  $h_2 = l_2(1 - \cos \varphi)$ . Запасенная системой грузов потенциальная энергия относительно положения равновесия будет равна

$$\Delta E_{\text{п}} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_1 l_1 + m_2 l_2)(1 - \cos \varphi).$$

Предоставим теперь маятник самому себе. Благодаря касательным составляющим сил тяжести грузов (которые играют роль «возвращающих» сил) маятник начнет двигаться к положению равновесия. Линейные скорости грузов по мере приближения к положению равновесия будут возрастать. В положении равновесия полная кинетическая энергия грузов станет равной

$$E_{\text{к}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – линейные скорости движения грузов. Выражая  $v_1$  и  $v_2$  через угловую скорость вращения стержня  $\Omega$  и длины  $l_1$  и  $l_2$ :

$$v_1 = \Omega l_1, \quad v_2 = \Omega l_2,$$

кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$E_k = \frac{1}{2} \Omega^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2).$$

Предполагая, что в системе отсутствуют потери энергии из-за трения в оси и сопротивления воздуха, и используя закон сохранения энергии, можно приравнять потенциальную энергию кинетической. В результате для угловой скорости вращения стержня получаем выражение

$$\Omega^2 = 2g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} (1 - \cos \varphi).$$

Сравним наш маятник с некоторым математическим маятником, имеющим такую длину  $L$ , что при одном и том же начальном отклонении  $\varphi$  от положения равновесия угловые скорости  $\Omega$  и периоды колебаний  $T$  обоих маятников оказываются одинаковыми. Для математического маятника можно записать

$$\Delta E_{\text{п}} = mgL(1 - \cos \varphi),$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = \Omega L.$$

Используя закон сохранения энергии, для угловой скорости  $\Omega$  получаем выражение

$$\Omega^2 = 2 \frac{g}{L} (1 - \cos \varphi).$$

Так как при одном и том же угловом отклонении  $\varphi$  угловые скорости  $\Omega$  обоих маятников равны, приравнивая правые части соответствующих равенств, находим длину  $L$  математического маятника, эквивалентного исходному маятнику с двумя грузами:

$$L = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2},$$

а значит, и частоту колебаний нашего физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}},$$



и его период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}}.$$

Если  $m_1$  либо  $m_2$  равны нулю (т.е. один из грузов отсутствует), то из последнего выражения получаем формулу для периода колебаний математического маятника. Если же, например,  $m_1 = m_2$  (т.е. массы обоих грузов одинаковы), то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 + l_2}}.$$

Таким образом, частота и период колебаний нашего маятника определяются как массами грузов, так и их расстояниями от оси вращения.

Сравним полученное выражение для частоты колебаний исследуемого маятника  $\omega$  с частотами колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей  $l_1$  и  $l_2$  соответственно, которые выражаются формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$

Если положить  $l_1 > l_2$ , то получаем неравенство

$$\omega_1 < \omega < \omega_2.$$

Таким образом, частота колебаний маятника с двумя грузами, расположенными на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от оси вращения, меньше большей и больше меньшей из собственных частот колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

Исследуем теперь более детально выражение для  $\omega$ . Предположим, что один из грузов, например груз с массой  $m_1$ , расположен на фиксированном расстоянии  $l_1$  от оси вращения маятника, а расстояние  $l_2$  второго груза с массой  $m_2$  меняется. Найдем отношение частоты колебаний нашего маятника к частоте колебаний математического маятника с длиной нити  $l_1$ :

$$y = \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}.$$

Введем безразмерные переменные  $x = l_2/l_1$  и  $a = m_2/m_1$ . Тогда

$$y = \sqrt{\frac{1 + ax}{1 + ax^2}}.$$

Исследуем зависимость  $y$  от  $x$ , т.е. зависимость отношения частот

$\omega/\omega_1$ , от отношения длин  $l_2/l_1$ . Поступим следующим образом. Обозначим  $z = 1 + ax$  и запишем

$$y = \sqrt{\frac{az}{z^2 - 2z + a + 1}} = \sqrt{\frac{a}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{\frac{a+1}{z}}\right)^2 + 2(\sqrt{a+1} - 1)}}.$$

Отсюда видно, что функция  $y(z)$  изменяется немонотонно: с ростом  $z$  (начиная с  $z = 1$ ) функция сначала растет, достигает максимума при  $z = \sqrt{a+1}$  (это следует из условия обращения в ноль первого слагаемого в знаменателе), после чего монотонно убывает. Максимальное значение при этом равно

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{a}{2(\sqrt{a+1} - 1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a+1} - 1)}.$$

Возвращаясь снова к переменной  $x$ , находим значение  $x = x_0$ , при котором функция  $y(x)$  достигает максимума:

$$x = x_0 = \frac{\sqrt{a+1} - 1}{a} = \frac{\sqrt{m_1(m_1 + m_2)} - m_1}{m_2}.$$

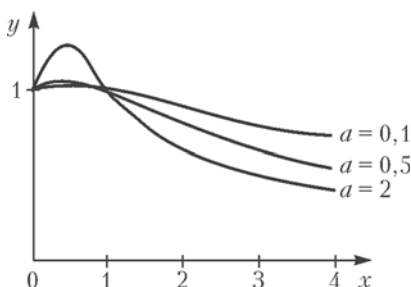


Рис. 2

На рисунке 2 представлен график функции  $y = y(x)$ . Видно, что  $y > 1$  в области  $0 < x < 1$ , т.е. при  $l_1 > l_2$  получаем  $\omega > \omega_1$ . Наоборот,  $y < 1$  в области  $x > 1$ , т.е. при  $l_1 < l_2$  получаем  $\omega < \omega_1$ .

Нетрудно обобщить полученные результаты на случай  $n$  тел с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , закрепленных на невесомом стержне на расстояниях  $l_1, l_2, \dots, l_n$  соответственно от точки подвеса:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \dots + m_n l_n^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2 + \dots + m_n l_n}}.$$

Если массы всех грузов одинаковы, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}},$$

т.е. период колебаний определяется только расстояниями, на которых располагаются грузики.

## ПОХОЖИЕ ДВИЖЕНИЯ

*Я.Смординский*

Существует ряд механических движений, которые хотя и различны по природе, но описываются одними и теми же формулами. Поэтому, если мы выясним, как меняются какие-то величины при одном движении, можно сделать выводы для аналогичных.

Расскажем о двух таких движениях.

**Гармонические колебания.** Между движением по окружности и гармоническим колебанием можно установить полезное соответствие.

Рассмотрим материальную точку, которая движется равномерно по окружности. Ее скорость равна  $v$  и направлена по касательной к окружности. Если радиус окружности  $R$ , то центростремительное ускорение точки равно  $v^2/R$  и направлено по радиусу к центру (рис.1).

Посмотрим, как движется проекция точки на горизонтальный диаметр окружности. Из рисунка ясно, что если положение точки на окружности задается углом  $\varphi$ , то положение ее проекции определяется координатой

$$x = R \cos \varphi .$$

Проекция скорости на диаметр равна

$$u = -v \sin \varphi ,$$

а проекция ускорения —

$$a = -\frac{v^2}{R} \cos \varphi .$$

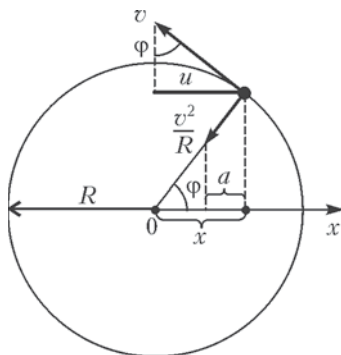


Рис. 1

Из первой и третьей формул легко получить, что

$$a = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x.$$

С таким же ускорением двигалась бы материальная точка массой  $m$  под действием силы

$$F = ma = -m\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x.$$

Сила, пропорциональная координате (но с противоположным знаком), называется гармонической, а движение под действием такой силы – гармоническим колебательным движением.

Введем вместо линейной скорости угловую:  $\omega = v/R$ . Тогда  $\varphi = \omega t$ , и

$$x = R \cos \omega t,$$

$$u = -\omega R \sin \omega t,$$

$$a = -\omega^2 R \cos \omega t.$$

Таким образом, мы получили все характеристики гармонического движения. Отсюда можно сделать вывод, что проекцию точки на окружности можно заменить реальной частицей, движение которой будет описываться полученными выше формулами.

Напомним, что входящие в уравнение второго закона Ньютона величины  $\vec{F}$  и  $\vec{a}$  – векторные. Следовательно, их можно спроектировать на любое направление, и зависимость между проекциями будет тоже описываться законом Ньютона.

**Туннель в Земле.** Покажем, что на точку, находящуюся внутри Земли, также действует гармоническая сила.

Пусть материальная точка массой  $m$  находится на расстоянии  $r$  от центра Земли. Если  $r$  больше радиуса Земли  $R$ , то на точку со стороны Земли действует сила тяготения

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

где  $G$  – гравитационная постоянная, а  $M$  – масса Земли. Если же  $r < R$ , то действие, которое оказывает на точку Земля, можно разбить на две части (рис.2): действие внутренней сферы – радиусом  $r$  – и действие внешнего сферического слоя. Как известно, сферический слой не со-

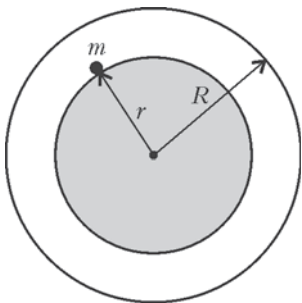


Рис. 2

здает внутри себя поля тяжести. Поэтому на точку будет действовать только внутренняя часть, масса которой равна

$$M_{\text{вн}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

где  $\rho$  – плотность Земли, с силой тяготения

$$F = -G \frac{M_{\text{вн}} m}{r^2} = -G \frac{4\pi \rho m}{3} r.$$

Следовательно, внутри Земли на точку действует гармоническая сила, пропорциональная расстоянию от центра Земли. Движение точки внутри Земли, например в туннеле, оказывается похожим на движение тела, подвешенного к пружине, – упругая сила пружины также пропорциональна ее растяжению.

Теперь мы можем решить такую задачу. Допустим, что через центр Земли прорыт узкий туннель (рис.3). В него из точки  $A$  уронили (без начальной скорости) камень. Камень долетает до точки  $B$  и начинает падать обратно, опять долетает до точки  $A$  и начинает падать к точке  $B$  и так далее. Как найти период таких колебаний?

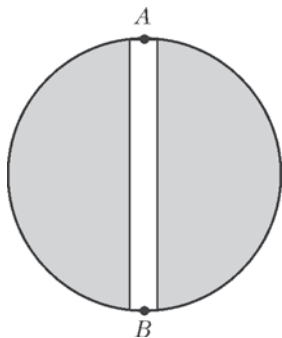


Рис. 3

Фактически, эту задачу мы уже решили. Движение камня в туннеле можно рассматривать как движение проекции точки, вращающейся вокруг Земли у ее поверхности, например спутника на круговой орбите вблизи Земли. Поэтому частота колебаний камня в туннеле равна угловой частоте вращения спутника вокруг Земли. Так как центростремительное ускорение спутника равно  $a_{\text{ц}} = \omega^2 R$  (расстояние от спутника до поверхности Земли  $h \ll R$ ) и, с другой стороны,  $a_{\text{ц}} = F/m$ , то угловая частота равна

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\text{ц}}}{R}} = \sqrt{\frac{F}{mR}} = \sqrt{G \frac{4\pi \rho m R}{3mR}} = \sqrt{G \frac{4\pi \rho}{3}}.$$

Период колебаний, следовательно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Отметим, что эта формула определяет и период колебаний тел в туннеле, прорытом через Землю в любом направлении (не обязательно через центр). Это следует из приведенного выше

утверждения о том, что уравнение Ньютона остается справедливым, если входящие в него векторные величины заменить их проекциями на любое направление.

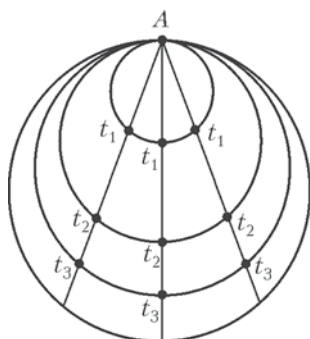


Рис. 4

туннели, исходящие из одной точки  $A$  (рис.4), то в любой момент времени  $t_1, t_2, \dots$  тела будут находиться на окружности, проходящей через точку  $A$ .

Однако можно провести доказательство и непосредственно, заметив, что хорда во столько же раз меньше диаметра, во сколько проекция силы на направление хорды меньше самой силы.

Тот же период будет характеризовать и движение точки по подземному круговому туннелю с центром в центре Земли.

Теперь вы, наверное, сами можете показать, что если одновременно уронить несколько тел в разные

## ПЕЧАЛЬ ИЛИ РАДОСТЬ

*К.Блиох*

*Если можно о чем скорбеть,  
Значит, можно чему улыбаться.*

С.Есенин

Что свойственно человеку: грустить или радоваться, скорбеть или улыбаться, быть оптимистом или пессимистом? Этот философский вопрос на протяжении многих веков обсуждали лучшие умы человечества и, естественно, давали разные ответы. И, как всегда в таких «глубоких» вопросах, каждый был по-своему прав. Я не знаю, на какую чашу весов выпало большее число ответов, но мне почему-то кажется, что на чашу радости.

Попробуем ответить на поставленный вопрос, опираясь только на элементарную физическую основу явлений, на известные нам экспериментальные данные и на ... музыку. Воспользуемся тем, что практически все люди, слушая музыку, испытывают похожие (конечно, в грубом приближении) эмоциональные переживания. В основе этого лежит музыкальный мажорно-минорный дуализм. Согласно классической теории музыки, музыкальные лады делятся на мажорные и минорные. При этом мажорные лады воспринимаются человеком как носители бодрой, радостной, светлой окраски, а минорные – унылой, печальной, сумрачной. Чем же отличаются мажорные и минорные лады с физической точки зрения?

**Ноты.** Музыкальные звуки записываются, в большинстве своем, нотами. Нота определяет высоту звучания данного звука, т.е. физически – основную частоту колебаний в его спектре. Шкала нот соответствует логарифму частотной шкалы. Музыкальный интервал между нотами, частота которых отличается в 2 раза, всегда равен октаве. Чтобы получить все ноты в пределах одной октавы, нужно октаву разделить на 12 равных музыкальных интервалов – полутонов. Итак, если исходная нота (положим, *до*) имеет основную частоту  $\omega_0$ , то основные частоты

остальных нот определяются по формуле

$$\log_2 \omega_n = \log_2 \omega_0 + n \frac{\log_2 2\omega_0 - \log_2 \omega_0}{12} = \log_2 \omega_0 + \frac{n}{12},$$

или

$$\omega_n = \omega_0 \cdot 2^{n/12},$$

где  $n$  – целое число. При  $n = 0$  формула определяет основную частоту исходной ноты, при  $n = 1$  – ноты на полтона выше, при  $n = -1$  – ноты на полтона ниже и т.д. При  $n = \pm 12$  мы получаем основные частоты нот на октаву выше и ниже исходной.

Музыкальная шкала звуков имеет циклическую структуру. Ноты, отличающиеся на октаву друг от друга, в определенном смысле тождественны друг другу. А именно, добавление к данному созвучию (аккорду) ноты, звучащей на октаву выше уже имеющейся в нем ноты, не изменяет его эмоциональную окраску, а затрагивает только тембральную сторону его звучания. (Это связано с тем, что в спектре каждого звука присутствует, кроме основной его частоты, частота звука на октаву выше и все его обертоны – см. Дополнение). Поэтому ноты получили собственные названия только в пределах одной октавы, дальше они циклически повторяются с добавлением только номера октавы, в которой они расположены.

В таблице 1 приведены названия нот, соответствующие им числа  $n$ , величина и название музыкальных интервалов, которые они составляют с исходной нотой. Пунктирные линии разделяют ноты разных октав. Знак «минус» перед названием и величиной интервала означает, что интервал откладывается вниз от начальной ноты. При сложении интервалов конечная нота первого интервала является начальной для второго.

**Мажор и минор.** Теперь мы можем определить понятия мажорного и минорного ладов. Мажорным (минорным) ладом называется лад, опорные звуки которого образуют мажорное (минорное) трезвучие. Мажорное (минорное) трезвучие состоит из трех звуков: первого – основного, второго – на большую (малую) терцию выше основного, третьего – на квинту выше основного. Таким образом, разница между мажором и минором заключается в положении среднего звука (терции) соответствующего трезвучия. Согласно таблице 1, до-мажорное и до-минорное трезвучия составляют ноты

$$\text{до} - \text{ми} - \text{соль} \quad (n = 0, 4, 7)$$

и

$$\text{до} - \text{ми-бемоль} - \text{соль} \quad (n = 0, 3, 7).$$



Таблица 1

<i>n</i>	Название ноты	Величина музыкального интервала	Название музыкального интервала
...	---	...	...
-2	ля-диез (си-бемоль)	-1 тон	-октава+малая септима (-большая секунда)
-1	си	-0,5 тона	-октава+большая септима (-малая секунда)
0	до	0 тонов	прима (унисон)
1	до-диез (ре-бемоль)	0,5 тона	малая секунда
2	ре	1 тон	большая секунда
3	ре-диез (ми-бемоль)	1,5 тона	малая терция
4	ми	2 тона	большая терция
5	фа	2,5 тона	кварта
6	фа-диез (соль-бемоль)	3 тона	тритон
7	соль	3,5 тона	квинта
8	соль-диез (ля-бемоль)	4 тона	малая секста
9	ля	4,5 тона	большая секста
10	ля-диез (си-бемоль)	5 тонов	малая септима
11	си	5,5 тонов	большая септима
12	до	6 тонов	октава
13	до-диез (ре-бемоль)	6,5 тонов	октава+малая секунда (малая нона)
...	...	...	...

Поистине удивительно, что минимальное отличие в положении одной ноты определяет две основополагающие противоположности: мажор и минор, радость и печаль в нашем настроении!

Любопытно, что мажорное и минорное трезвучия являются обратными друг другу не только в эмоциональном, но и в математическом смысле. Действительно, мажорное трезвучие

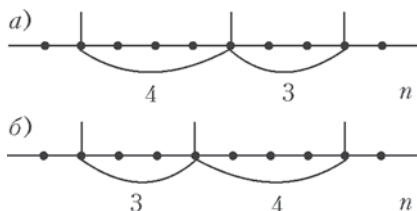


Рис. 1. Мажорное (а) и минорное (б) трезвучия на нотной шкале  $n$ . При инверсии (отражении) оси  $n$  мажор и минор переходят друг в друга

состоит из последовательно отложенных большой, а затем малой терций ( $4 + 3$ ; рис.1,а). Минорное трезвучие

состоит из этих же интервалов, но в обратном порядке: малая терция, затем большая ( $3 + 4$ ; рис.1,б).

Если мы зеркально отразим ноты трезвучия относительно произвольной точки нотной шкалы, то интервалы

будут следовать в обратном порядке: мажорное трезвучие переходит в минорное и наоборот. А вспомнив, что нотная шкала соответствует логарифму частотной шкалы, мы получим следующий факт: если три звука с частотами  $a, b, c$  образуют мажорное (минорное) трезвучие, то звуки с частотами  $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}$  будут образовывать минорное (мажорное) трезвучие.

**Обертоны звуков.** Каждый природный звук представим в виде суммы бесконечного числа гармоник – синусоидальных колебаний определенной частоты и амплитуды. Чем больше амплитуда, тем более существенна данная гармоника в общем звучании. Наибольшую амплитуду имеет гармоника основной частоты – основной тон. Следующие за ней (по убыванию амплитуды) гармоники называются обертонами. Частоты обертонов находятся, как правило, в одних и тех же соотношениях с частотой основного тона для любого природного звука. Связано это вот с чем.

Все звуки, которые мы слышим в природе, рождаются и усиливаются колебаниями различных физических тел. В основе этого лежит явление резонанса. Пусть тело, издающее в результате какого-то внешнего воздействия звук, имеет характерный линейный размер  $L$ . Тогда, как известно из физики колебаний, в первую очередь возбуждаются волны, для которых выполнено условие резонанса

$$L = m \frac{\lambda}{2},$$

где  $\lambda$  – длина звуковой волны, а  $m$  – любое натуральное число. Это условие требует, чтобы внутри тела укладывалось целое число полуволн. Например, в колеблющейся струне действительно должно укладываться целое число полуволн, так как ее концы закреплены жестко и должны приходиться на узловые точки соответствующих синусоид (рис. 2). Поскольку длина звуковой волны однозначно связана с ее частотой:

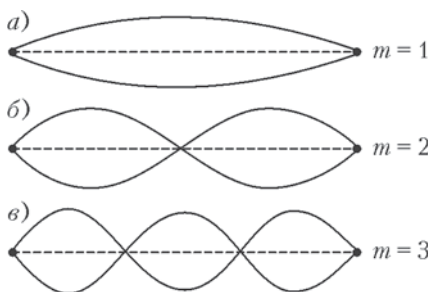


Рис. 2. Колебания струны, отвечающие: а) основному тону, б) первому оберто-ну, в) второму оберто-ну

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

где  $c$  – скорость звука, то условие резонанса можно записать в виде

$$\omega = m \frac{\pi c}{L}.$$

При  $m = 1$  эта формула описывает частоту основного тона звука:

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{L},$$

при  $m > 1$  – частоты его обертонов. Число  $m - 1$  является номером обертона. Чем выше обертон, тем слабее он возбуждается.

**Музыка природы.** Определим теперь, каким нотам соответствуют природные обертоны звука. Выразим частоты обертонов через частоту основного тона:

$$\omega_{m-1} = m\omega_0$$

и воспользуемся формулой для основных частот нот октавы:

$$\omega_n = \omega_0 \cdot 2^{n/12}.$$

Приравняв правые части этих выражений, решим получившееся равенство относительно  $n$  и узнаем, каким нотам соответствуют обертоны звука:

$$n = 12 \log_2 m,$$

где  $n$  – уже нецелое число, поскольку обертоны не в точности

Таблица 2

$m$	$n$	Название ноты	Музыкальный интервал относительно основного тона
1	0	до	прима
2	12	до	октава
3	19,02	соль	октава+квинта
4	24	до	две октавы
5	27,9	ми	две октавы + + большая терция

соответствуют определенным нотам. В таблице 2 приведены вычисленные приближенные значения  $n$  для первых четырех обертонов и соответствующие им ноты, определенные по таблице 1.

Мы видим, что первые четыре обертона приближенно соответствуют нотам *до*, *ми*, *соль*, составляющим аккорд мажорного трезвучия. (Напомним, что отличие в нотах на октаву не играет роли при определении эмоционального характера аккорда.) Более того, в первых пятнадцати обертонах ноты *до*, учитываемых в музыкальной акустике, нет ноты *ми-бемоль*, которая соответствует минорному трезвучию. Заметим также, что ноты не в точности соответствуют природным обертонам звуков – мы получили нецелые значения  $n$ . Это показывает приближенность введенного европейской цивилизацией нотного строя. (Эта приближенность называется темперацией, и она необходима, чтобы построить столь удобную циклическую нотную систему; см. Дополнение.) Тем не менее, с хорошей точностью (которая удовлетворяет слушателей уже четыре столетия) можно утверждать, что в любом природном звуке, будь то звон капли дождя, скрип дерева, птичий свист или звучание музыкального инструмента, мы всегда слышим мажорный аккорд.

Итак, каждый человек (в том числе и тот, который не знает ни нотной грамоты, ни физических основ акустики) однозначно воспринимает мажорную музыку как носителя разнообразных эмоций радости, а минорную – как носителя печальных эмоций. Иными словами, человек инстинктивно или подсознательно воспринимает свойственную природе музыку как радостную и несвойственную – как печальную. А если учесть, что человек

также есть часть природы, то можно предположить, что эмоции радости более свойственны человеку, нежели эмоции печали.

В заключение отметим, что приведенные рассуждения следует воспринимать лишь как любопытный факт, демонстрирующий тесную взаимосвязь (даже на элементарном уровне) физических, культурных и духовных сфер бытия. Однако отсюда не следует делать каких-либо однозначных практических выводов. Во-первых, потому что природа устроена гораздо сложнее и богаче, а во-вторых, потому что в других сферах законы физики могут и не действовать – как известно, всякий закон имеет свою область применимости.

### Дополнение. Как строится нотная система

До сих пор мы говорили о существующем нотном строе и природных обертонах звуков как о независимых явлениях. На самом деле взаимосвязь между ними не случайна, и первичными являются обертоны звуков (они существовали в природе задолго до появления человека). Представления же о музыке как об определенных гармонично звучащих созвучиях появились именно из-за взаимодействия обертонов разных звуков.

**Нота первого обертона. Октава.** Чтобы ввести нотную шкалу, нужна какая-то условная точка отсчета. Пусть ею будет нота с основной частотой  $\omega_0$ , частоты обертонов которой описываются формулой

$$\omega_{m-1} = m\omega_0.$$

Рассмотрим теперь ноту, построенную на первом обертоне исходной ноты:  $\omega_1 = 2\omega_0$ . Частоты ее обертонов будут вычисляться по формуле

$$\omega_{m-1} = m\omega_1 = 2m\omega_0.$$

Видно, что основной тон и все обертоны ноты первого обертона содержатся в обертонах исходной ноты:  $(m-1)$ -й обертон первой ноты является  $(2(m-1))$ -м обертоном второй (рис.3, а и б). Это определяет гармонию в

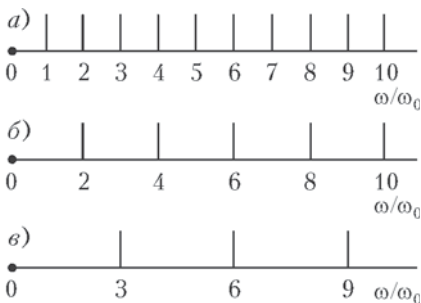


Рис. 3. Частоты, соответствующие основному тону и обертонам: а) исходной ноты, б) ноты первого обертона, в) ноты второго обертона

созвучии таких нот и объясняет то, что мы воспринимаем их как эмоционально эквивалентные. Таким образом мы приходим к октаве, главному естественно введенному нотному интервалу.

Далее мы будем исходить из эквивалентности нот, частоты которых отличаются в 2 раза. Поэтому нотная последовательность будет обладать определенной цикличностью – достаточно определить все ноты в интервале частот  $[\omega_0; 2\omega_0)$ , а потом повторить подобным образом в интервалах  $[2\omega_0; 4\omega_0)$ ,  $[4\omega_0; 8\omega_0)$  и т.д. Для этого удобно изображать частоты нот в виде точек на окружности, согласно формуле

$$\alpha = 2\pi \log_2 \frac{\omega}{\omega_0},$$

где  $\alpha$  – угловая координата, соответствующая данной частоте  $\omega$  и откладываемая по часовой стрелке от нулевого значения, связанного с исходной частотой  $\omega_0$ . Из формулы видно, что увеличение частоты в 2 раза соответствует прибавлению угла  $2\pi$  и оставляет точку на прежнем месте. При таком подходе октава эквивалентна нулевому элементу множества интервалов – приме, и ее недостаточно для построения нетривиальной нотной системы.

**Нота второго обертона. Квинта.** Чтобы получить нетривиальный интервал, рассмотрим ноту, построенную на втором обертоном исходной ноты:  $\omega_2 = 3\omega_0$ . Все ее обертоны  $\omega_{m-1} = m\omega_2 = 3m\omega_0$  также содержатся в обертонах исходной ноты, но расположены они более редко и соответствуют более слабым (высоким) обертонам исходной ноты по сравнению с нотой первого обертона (см. рис.3,а и в). А главное, что среди обертонов ноты второго обертона есть такие, которые не содержатся в обертонах ноты первого обертона (см. рис.3,б и в). Поэтому можно считать, что мы имеем дело с новой, вполне самостоятельной нотой. Интервал между нотами первого и второго обертонов есть квинта. Квинте соответствует угловой интервал

$$\alpha_q = 2\pi \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2\pi (\log_2 3 - 1) \approx 2\pi \cdot 0,585,$$

откладываемый от точки исходной ноты на окружности. (Мы учли эквивалентность положения на окружности исходной ноты и ноты первого обертона.)

**Построение нотной системы на квинтах.** С помощью квинты уже можно построить всю нотную систему. Действительно, введенная нами начальная нота условна, нотная система не должна зависеть от ее выбора. Построив одну квинту относи-

тельно исходной ноты, мы должны отложить квинту и от полученной ноты и от всех последующих, потому что любая из них может быть выбрана в качестве начальной (рис.4,а). Так будет продолжаться до тех пор, пока очередная из откладываемых

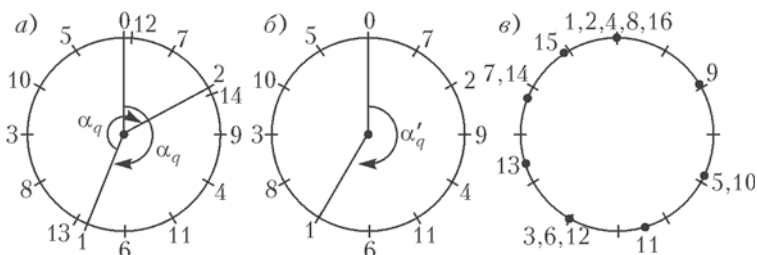


Рис. 4. а) Последовательно откладываемые на окружности «чистые» квинты. Нулевая точка соответствует исходной ноте. б) Последовательно отложенные «исправленные» квинты. Двенадцатая точка попадает в начальную, и круг замыкается, в) Основной тон и первые 15 обертонов исходной ноты (точки) на фоне построенной нотной системы (черточки). Точкам, возле которых написано несколько чисел через запятую, отвечают все соответствующие обертоны

мых последовательно квинт не попадет в начальную точку и процесс замкнется. Сколько же квинт (сколько точек и различных нот на окружности) мы отложим, пока не вернемся в исходную точку (т.е. совершим целое число оборотов)? Запишем для этого условие возвращения  $k$ -й квинты в начальную точку после  $l$  оборотов:

$$k\alpha_q = 2\pi l ,$$

или

$$\frac{k+l}{k} = \log_2 3 .$$

Но  $\log_2 3$  – иррациональное число, которое не может быть представлено в виде отношения двух целых чисел. Поэтому желаемое равенство никогда не будет достигнуто, и бесконечное число точек последовательно откладываемых нами квинт заполнит в конце концов всю окружность (см. рис 4,а). Значит, нужно вводить бесконечное число нот либо жертвовать цикличностью или симметрией нашей нотной системы?

**Темперация.** Выход из этого сложного положения оказался удивительно простым, но человечеству понадобилось более 20 веков, пока в середине XVII века он не был найден органистом Андреем Веркмейстером. (Заметим, что до него этой задачей

занимались такие ученые, как Кеплер и Эйлер.) Он предложил следующее решение: раз на целом числе окружностей не укладывается целое число квинт, значит, нужно подправить квинту так, чтобы укладывалось. Оказывается, что двенадцать квинт примерно равны семи октавам, и, отложив двенадцать точек, мы совершаем примерно семь оборотов по окружности и почти попадаем в исходную точку (см. рис.4,а). Изменим величину квинты так, чтобы это попадание было точным. Тогда исправленная квинта будет соответствовать углу

$$\alpha'_q = 2\pi \cdot \frac{7}{12} \approx 2\pi \cdot 0,583.$$

Двенадцать последовательно отложенных квинт точно разбивают окружность на 12 равных частей (см. рис.4,б). Полученные точки соответствуют нотам таблицы 1, а угловой интервал  $\pi/6$  между соседними точками соответствует минимальному музыкальному интервалу (полтона). Замена натуральных природных квинт искусственными и введение соответствующего приближенного строя называется темперацией (от латинского *temperatio* – соразмерность).

**Остальные обертоны.** Следующие, более высокие, обертоны звука довольно хорошо укладываются в нотную систему, построенную нами только на первых двух обертонах. Рисунок 4,в показывает положение основного тона и первых его пятнадцати обертонов на фоне введенной нотной системы. Видно, что большинство обертонов с хорошей точностью соответствуют определенным нотам. Благодаря этому предложенный нотный строй кажется нам естественным и гармоничным в звучании. С помощью рисунка 4,в можно также объяснить, почему одни музыкальные интервалы: прима, малая и большая терции, малая и большая сексты и октава ( $n = 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12$ ) считаются консонансами, т.е. более благозвучными, а другие интервалы: малая и большая секунды, тритон, малая и большая септимы ( $n = 1, 2, 6, 10, 11$ ) – диссонансами, т.е. менее благозвучными. Поворачивая построенную картину обертонов на окружности на угол  $n\pi/6$ , можно увидеть, что для  $n$ , соответствующим консонансам, повернутые обертоны согласуются с исходными лучшим образом, чем для  $n$ , соответствующим диссонансам.



## ВРАЩЕНИЕ: РЕКИ, ТАЙФУНЫ, МОЛЕКУЛЫ

А.Стасенко

А что между ними – реками, тайфунами, молекулами – общего? Разве только то, что всё состоит из молекул? Однако, их объединяет и нечто другое (о чем мы собираемся поговорить) – явление, которое возникает при движении во вращающейся системе координат и которое связано с так называемыми ускорением Кориолиса и силой Кориолиса (Гюстав Гаспар Кориолис, 1792–1843). Именно эта сила делает одни берега рек крутыми, другие – пологими, закручивает тайфуны и даже... вторгается во внутреннюю «жизнь» молекул. Итак...

Рассмотрим два соседних кольцевых пояса на поверхности Земли, связанных с географическими параллелями  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Эти два пояса отмечены на рисунке 1 разными линиями. Понятно, что чем больше широта  $\theta$ , тем меньше линейная (окружная) скорость ( $v_2 < v_1$ ). Например, на полюсе ( $\theta = 90^\circ$ ) она вообще равна нулю.

Пусть в северном полушарии река Некая течет с юга на север вдоль меридиана, т.е. перпендикулярно парал-

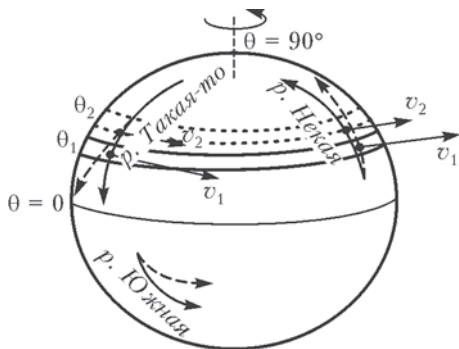


Рис. 1

лелям. Частицы воды при «пересадке» с параллели  $\theta_1$  на  $\theta_2$  по инерции стремятся сохранить скорость  $v_1$  (направленную к востоку), и, если бы поверхность Земли была гладкой и скользкой, они, попав на широту  $\theta_2$ , отклонились бы *вправо* (пунктир на рисунке 1), т.е. к востоку. Земной наблюдатель сказал бы, что на частицы воды действует сила, перпендикулярная скорости их движения, – уже упомянутая кориолисова сила. Но уж если река течет в своем русле, то эти частицы воды будут ударяться о

правый берег (ведь он движется к востоку со скоростью  $v_2 < v_1$ ) и, следовательно, будут постепенно его разрушать.

Если мы рассмотрим реку Такую-то, текущую с севера на юг, то убедимся, что она стремится отклониться к западу, но относительно своего движения опять же *вправо*.

Вот почему у всех меридиональных рек в северном полушарии правые берега крутые, левые – пологие. (И, конечно, уровень воды у правого берега всегда несколько выше, чем у левого.) Очевидно, что в южном полушарии меридиональные реки будут размывать *левые* берега.

Этот географический факт был сформулирован выдающимся естествоиспытателем Карлом Бэрм (1792–1876) с учетом своих собственных и более ранних наблюдений русских исследователей (начиная с 1826 г.). При этом он верно объяснил подмеченное явление влиянием вращения Земли.

Особенно ярко действие кориолисовой силы проявляется при движении масс воды и воздуха в океане и атмосфере. Ну кто не знает, что самое знаменитое океанское течение Гольфстрим (направленное на север в северном полушарии) отклоняется *вправо*, обездоливая теплом Канаду и обогревая Европу! Ведь это та же река, только без берегов.

А как образуются тайфуны – грозные атмосферные явления глобального масштаба (с характерным диаметром порядка тысячи километров), – производящие колоссальные разрушения?

Пусть из-за неравномерного нагрева Солнцем поверхности Земли и атмосферы где-то образуется область пониженного давления (барометр «падает», что очень неприятно для моряков). К ней радиально устремляются воздушные массы из соседних областей высокого давления. Но, как мы уже знаем, все эти движущиеся массы, вследствие вращения Земли, стремятся

отклониться вправо в северном полушарии или влево – в южном. В результате возникает колоссальный вихрь, в котором массы воздуха вращаются по часовой стрелке в северном полушарии (рис.2) или против часовой – в южном.

Перейдем теперь к молекулам, а именно – к молекулам газа. Известно, что они не только хаотически мечутся во всех направлениях между столкновениями друг с другом, но еще и быстро

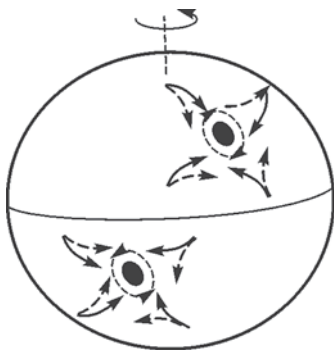


Рис. 2

вращаются, причем энергия их вращательного движения того же порядка, что и энергия поступательного перемещения. А кроме того, при определенных условиях части молекул (например, атомы или в очень сложных молекулах группы атомов – радикалы) могут колебаться относительно центра масс (центра тяжести) молекулы, и опять же энергия этих колебаний того же порядка, что энергия поступательного и вращательного движений. (В физике этот факт называется принципом равномерного распределения энергии по степеням свободы – но это лишь к слову.)

Рассмотрим простейшую модель трехатомной молекулы, имеющей два одинаковых атома: одинаковые атомы соединены гибкими невесомыми пружинами с третьим центральным атомом (рис.3, 4). Например, это может быть молекула углекислого газа  $\text{CO}_2$ , очень важная для работы мощных инфракрасных лазеров. Если такая молекула ни с чем не взаимодействует, ее центр масс движется по прямой линии. Направим ось времени вправо и будем следить за движением ее атомов в системе координат, вращающейся вокруг центра масс, – аналогично тому, как мы рассматривали движение рек, океанских течений и воздушных масс на вращающейся Земле.

Возможны два случая колебаний (как говорят физики, две моды): 1) крайние атомы движутся одновременно по направлению к центру масс или от него, т.е. обе пружинки одновременно сокращаются или удлиняются; 2) крайние атомы движутся одновременно в одну и ту же сторону – тогда одна из пружинок сокращается, а другая удлиняется.

Можно показать, что в первом случае (см. рис.3) происходит либо ускорение, либо замедление вращения. Например, при встречном движении атомов к центру на них действуют силы Кориолиса, отклоняющие их вправо (относительно их движения

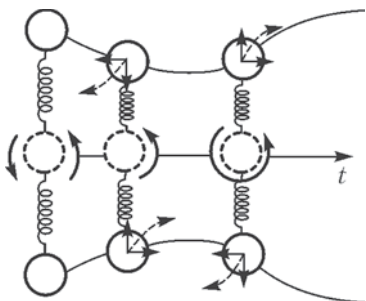


Рис. 3

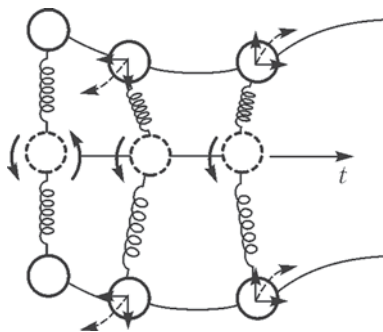


Рис. 4

к третьему атому) и, следовательно, ускоряющие вращение. При удалении крайних атомов от центра масс силы Кориолиса тоже отклоняют их вправо, но теперь это приводит к замедлению вращения. Точно так же фигурист на льду вращается быстрее, прижимая руки к телу. (К слову, эти явления связаны и с так называемым законом сохранения момента импульса.)

А вот во втором случае наблюдается нечто еще более интересное (см. рис.4). Когда крайние атомы молекулы одновременно движутся в одну сторону, силы Кориолиса тоже отклоняют их вправо, но одна из них стремится ускорить вращение относительно центра масс, а другая – замедлить, в результате молекула изогнется. Через четверть периода колебаний явление повторится, но теперь уже молекула будет изогнута в другую сторону. Значит, колебания атомов во вращающейся молекуле приводят к дополнительным изгибным колебаниям. Но поскольку энергии и, значит, скорости движения колебательного и вращательного движений одного порядка (как уже было сказано), их периоды и частоты могут оказаться близкими друг другу, так что дело пахнет резонансом. И поскольку молекулы излучают, все это обязательно скажется на спектре их инфракрасного излучения. Что и наблюдают физики-спектроскописты. (Заметим, что во втором случае колебания крайних атомов и изгибы «пружин» приведут к тому, что и центральный атом тоже станет как-то перемещаться относительно центра масс, но это не повлияет на рассмотренную нами качественную картину явлений.)

Итак, всюду – даже у рек, тайфунов и молекул – можно найти нечто общее. Ищите да обрящете.

## СКОЛЬКО СТОИТ ЗАПУСК СПУТНИКА?

*В.Ланге*

Рассмотрим спутник, обращающийся вокруг Земли по сравнительно низкой круговой орбите, во всех точках которой ускорение силы тяжести можно считать равным его значению вблизи земной поверхности, т.е.  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Учитывая, что центростремительное ускорение спутнику сообщает сила притяжения к Земле:

$$\frac{mv^2}{R} = mg,$$

где  $m$  – масса спутника,  $v$  – его скорость,  $R$  – радиус Земли, находим кинетическую энергию спутника:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{2}.$$

Для оценки потенциальной энергии спутника, движущегося по низкой орбите, используем приближение

$$E_{\text{п}} = mgH,$$

где высота орбиты  $H \ll R$ .

Сравнивая два последних выражения, мы видим, что потенциальная энергия спутника на низкой орбите намного меньше его кинетической энергии, которую, таким образом, можно считать практически равной полной энергии спутника  $E$ . Найдем ее, положив  $m = 100 \text{ кг}$  и  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ :

$$E = 0,5 \cdot 100 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} = 3,1 \cdot 10^9 \text{ Дж} = 870 \text{ кВт}\cdot\text{ч}.$$

При тарифе, например, 56 копеек за 1 киловатт-час запуск спутника должен, казалось бы, стоить всего около 480 рублей! Почему же на самом деле затраты на осуществление космических программ соизмеримы с национальными бюджетами небольших стран?

Разгадка парадокса состоит в том, что полученное нами значение энергии, 870 кВт·ч, *необходимо, но совершенно недостаточно* для запуска спутника массой 100 кг на околоземную

орбиту. Поскольку ракета как тепловая машина обладает крайне низким коэффициентом полезного действия, фактические затраты энергии оказываются во много-много раз больше. Дело в том, что наряду с полезным грузом приходится поднимать также горючее, необходимое для непрерывной работы двигателей. Правда, ракета «худеет» очень быстро, но для сообщения ей желательной скорости нужно сжечь колоссальные количества топлива, что сильно снижает КПД.

Для вывода формулы, связывающей массу и скорость ракеты, примем сначала, что топливо сгорает отдельными порциями массой  $\Delta M = M/N$ , где  $M$  – масса ракеты перед выбросом из нее порции  $\Delta M$ , а  $N$  – достаточно большое число. После сгорания первой порции масса ракеты станет равной

$$M_1 = M_0 - \frac{M_0}{N} = M_0 \left( 1 - \frac{1}{N} \right).$$

После сгорания второй порции масса вновь уменьшится на  $(1/N)$ -ю часть, но уже от  $M_1$ , и станет равной

$$M_2 = M_1 \left( 1 - \frac{1}{N} \right) = M_0 \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^2.$$

Рассуждая таким же образом далее, находим массу ракеты после сгорания  $n$ -й порции топлива:

$$M_n = M_0 \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^n. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь, как меняется при этом скорость ракеты. При скорости истечения продуктов горения, равной  $u$ , масса  $\Delta M$  уносит импульс  $\Delta p = u \Delta M$ . В соответствии с законом сохранения импульса такой же по величине, но противоположно направленный импульс получит ракета, в результате чего ее скорость увеличится на  $\Delta p / (M - \Delta M) = (u \Delta M) / (M - \Delta M)$ . Таким образом, если вначале ракета покоилась, то после сгорания первой порции массой  $\Delta M_1 = M_0/N$ , имевшей импульс  $\Delta p_1 = (M_0 u)/N$ , скорость ракеты станет равной

$$v_1 = \frac{\Delta p_1}{M_1} = \frac{u}{N-1}.$$

После сгорания второй порции топлива массой  $\Delta M_2 = M_1/N$ , унесшей импульс  $\Delta p_2 = (M_1 u)/N$ , скорость ракеты возрастет на  $\Delta p_2 / (M_1 - \Delta M_2)$  и составит

$$v_2 = v_1 + \frac{u}{N-1} = \frac{2u}{N-1}.$$

Продолжая рассуждения далее, получим скорость ракеты после сгорания  $n$ -й порции:

$$v_n = \frac{nu}{N-1}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем массу ракеты, достигшей скорости  $v$ :

$$M = M_0 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{v(N-1)/u}$$

(индекс  $n$  здесь и далее опущен, поскольку надобности в нем больше нет).

На самом деле топливо в ракете сгорает не отдельными порциями, а непрерывно. Для перехода к формуле, более правильно описывающей реальный случай, нужно считать  $N$  чрезвычайно большим числом. В таком случае единицей в показателе степени последнего выражения можно пренебречь, после чего оно приобретает вид

$$M = M_0 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{vN/u} = M_0 \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N\right]^{v/u},$$

а при неограниченном возрастании  $N$  —

$$M = M_0 e^{-v/u}.$$

Эта формула была выведена Константином Эдуардовичем Циолковским и носит его имя. Из нее хорошо видно, что ракета может достичь большой скорости, но при этом оставшаяся масса окажется много меньше первоначальной.

Пользуясь формулой Циолковского, можно оценить, сколько горючего нужно сжечь, чтобы сообщить ракете необходимую скорость. Однако для этого следует знать относительную скорость истечения газов из сопла ракеты. Чтобы найти ее, приравняем кинетическую энергию небольшой массы  $\Delta m$  газа, вылетевшей из ракеты за малый интервал времени, той химической энергии, которой обладала эта масса до того, как она сгорела. Обозначив удельную теплоту сгорания (теплотворную способность) топлива через  $q$ , получим равенство

$$\frac{\Delta m u^2}{2} = \Delta m q,$$

откуда

$$u = \sqrt{2q}.$$

Удельная теплота сгорания смеси керосина с азотной кислотой, иногда используемой в ракетной технике, составляет приблизительно 6,3 МДж/кг, и скорость истечения, следовательно, не может превысить

$$\sqrt{2 \cdot 6,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} = 3,55 \text{ км/с}.$$

Одна из самых больших возможных скоростей истечения достигается при использовании реакции горения металлического бериллия в атмосфере кислорода:



Число мегаджоулей справа показывает, какая энергия выделяется при взаимодействии одного моля бериллия (9 г) с половиной моля кислорода (16 г). Стало быть, удельная теплота сгорания в этом случае равна  $0,612 \text{ МДж} / 0,025 \text{ кг} = 24,5 \text{ МДж/кг}$ , а наибольшая скорость истечения газов составляет

$$\sqrt{2 \cdot 24,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} = 7 \text{ км/с}.$$

Однако в дальнейших расчетах мы примем скорость истечения равной всего 2,5 км/с, поскольку, во-первых, такие энергетически выгодные реакции, как окисление бериллия, использовать невозможно из-за высокой токсичности самого бериллия и его соединений, а во-вторых, фактическая скорость истечения всегда оказывается меньше максимальной.

Теперь по формуле Циолковского находим, что при достижении, например, первой космической скорости 7,9 км/с конечная масса ракеты окажется равной

$$M = M_0 e^{-7,9/2,5} = \frac{M_0}{e^{3,6}} = \frac{M_0}{37}.$$

Иначе говоря, масса горючего должна составлять  $36/37 = 97,5\%$  от стартовой массы ракеты. Естественно, что на долю действительно полезного груза (экипаж, приборы и т.п.) остается совсем немного. Вот почему для уменьшения бесполезной массы, которую пришлось бы разгонять до большой конечной скорости, ракеты (по идее, впервые выдвинутой также Циолковским) делают многоступенчатыми, причем нижние ступени сбрасываются, когда в них кончается топливо.

Для окончательной оценки затрат на запуск ракеты введем коэффициент полезного действия, определив его как отношение кинетической энергии массы ракеты, оставшейся к моменту достижения нужной скорости, к химической энергии сгоревшего



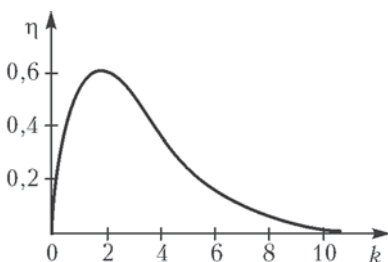
топлива:

$$\eta = \frac{Mv^2/2}{(M_0 - M)q} = \frac{v^2}{2(M_0/M - 1)q}.$$

Пользуясь формулой Циолковского и выражением для максимальной скорости истечения газов, получим, обозначив отношение  $v/u$  через  $k$ , следующее соотношение:

$$\eta = \frac{v^2}{u^2(e^{v/u} - 1)} = \frac{k^2}{e^k - 1}.$$

График зависимости  $\eta$  от  $k$  показан на рисунке. Из него хорошо видно, что при скорости ракеты, заметно превышающей скорость



истечения газов, коэффициент полезного действия становится очень малым. Например, при  $k = 10$  коэффициент составляет 0,45%. Это уже малая величина, но в действительности дело обстоит еще во много раз хуже.

## ХАОС МОЛЕКУЛ И ЗВЕЗД

А.Стасенко

Далеко-далеко в глубинах Вселенной живет большое звездное облако, состоящее из одинаковых звезд типа нашего Солнца, которые летят равновероятно во всех направлениях с одинаковыми средними скоростями. И средние расстояния между ними тоже одинаковы. Физик сказал бы, что это похоже на однородный изотропный газ. А газ, как сказал бы древний грек, это же просто хаос ( $\chi\alpha\omicron\varsigma$ ).

Однако звезды, согласно закону всемирного тяготения, взаимодействуют друг с другом. Пролетая одна вблизи другой, они не могут двигаться по прямой, их траектории искривляются, так что издали кажется, что два упругих шарика столкнулись друг с другом и разлетелись под углом  $\chi$  с прежней относительной скоростью (рис.1). Но что произойдет с их планетными системами — это совсем небез-

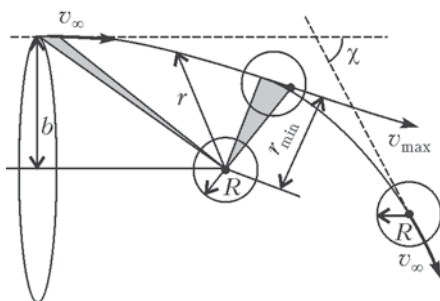


Рис. 1

различно для их жителей. Для них важен вопрос, каково (хотя бы в среднем) время между столкновениями звезд в этом звездном облаке. И вообще: что такое «столкновение»? Ведь звезды взаимодействуют, в принципе, на любом расстоянии. (То же можно сказать о свободных

электронах и протонах в газовой плазме. И даже нейтральные молекулы в «обычных» газах «чувствуют» друг друга издали благодаря электромагнитным полям, порождаемым движением электронов.)

И тут пора написать несколько формул.

Пусть наименьшее допустимое расстояние между звездами равно  $r_{\min}$ . Согласно второму закону Кеплера, площадь треу-

гольника, «заметаемая» радиусом-вектором  $\vec{r}$  в единицу времени, остается постоянной. Пусть относительная скорость звезд на большом удалении друг от друга равна  $v_\infty$ , так называемое прицельное расстояние равно  $b$ , а наибольшая скорость при наибольшем сближении равна  $v_{\max}$ . Запишем утверждение второго закона Кеплера для двух выделенных на рисунке треугольников:

$$\frac{1}{2} b v_\infty \Delta t = \frac{1}{2} r_{\min} v_{\max} \Delta t. \quad (1)$$

Здесь  $b$  и  $r_{\min}$  – высоты этих треугольников, а  $v_\infty \Delta t$  и  $v_{\max} \Delta t$  – их основания, т.е. расстояния, пройденные звездой за малое время  $\Delta t$ .

Ясно, что при сближении звезд их относительная скорость растет. За счет чего? Конечно, за счет работы силы притяжения  $F = -Gmm/r^2$ . Это изменение скорости можно найти из второго закона Ньютона. А можно описать этот процесс на основе предположения о постоянстве суммарной механической энергии системы двух звезд. Иными словами, записать, что сумма их кинетической  $E_k$  и потенциальной  $E_\pi$  энергий одинакова при любом их расположении – например, при самом большом («бесконечном») и наименьшем расстояниях между ними:

$$E_{k_\infty} + 0 = E_{k_{\max}} + E_{\pi \min},$$

или

$$\frac{mv_\infty^2}{2} + 0 = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \left( -\frac{\alpha}{r_{\min}} \right). \quad (2)$$

Здесь «ноль» (в левой части) означает, что при бесконечном удалении друг от друга звезды не взаимодействуют, а слагаемое  $-\alpha/r_{\min}$  в правой части равно энергии их взаимодействия при  $r = r_{\min}$ . Тут уместно вспомнить, что эта энергия взаимодействия (потенциальная энергия) как раз и равна работе, которую нужно затратить, чтобы «вытащить» в бесконечность одну звезду из потенциальной ямы, создаваемой другой звездой (рис. 2). Поскольку сила притяжения обратно пропорциональна квадрату рас-

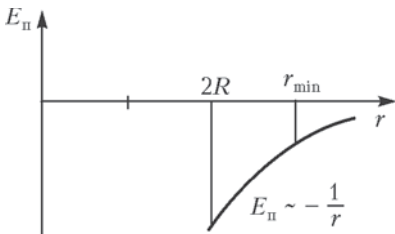


Рис. 2

стояния, работа против этой силы будет обратно пропорциональна первой степени расстояния, а коэффициент  $\alpha$ , конечно же, содержит произведение масс звезд и гравитационную постоянную:  $\alpha = 2Gm^2$ .

Внимательный читатель может спросить, почему здесь появился множитель «2». В механике известно, что движение двух взаимодействующих частиц (например, двух тел, соединенных одной пружинкой, двух гравитирующих масс, двух электрических зарядов) на расстоянии  $r$  можно свести к движению одной (так называемой приведенной) массы

$$\frac{m}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

с радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Поскольку нас интересуют здесь только оценки порядков величин, не будем останавливаться на этом подробнее.

Выразим  $v_{\max}$  из равенства (1) и подставим в равенство (2). Тогда получим

$$\left( \frac{b}{r_{\min}} \right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{r_{\min} m v_{\infty}^2}. \quad (3)$$

Видно, что последнее слагаемое есть отношение потенциальной энергии взаимодействия звезд (при наибольшем сближении) к кинетической энергии их относительного движения. Если бы не было никакого взаимодействия ( $\alpha = 0$ ), то получилось бы  $b = r_{\min}$ , что естественно, так как звезды при этом двигались бы по прямым. Значит, взаимодействие приводит к увеличению прицельного расстояния, а именно – все звезды, центры которых на бесконечности попадут в круг радиусом  $b$ , пройдут от нашей звезды не далее чем на расстоянии  $r_{\min}$  (т.е. в этом смысле заведомо «столкнутся» с ней). Если среднее расстояние между звездами равно  $l$ , то концентрация звезд будет  $n = l^{-3}$ . Тогда «поток звезд» через круг с прицельным расстоянием  $b$  равен  $\pi b^2 n v_{\infty}$ , а значит, среднее время между столкновениями звезд будет

$$\tau \sim \frac{1}{\pi b^2 n v_{\infty}} = \frac{l^3}{\pi b^2 v_{\infty}}. \quad (4)$$

Сделаем теперь численные оценки. Выберем  $r_{\min} = 2R$  ( $R$  – радиус звезды), как для жестких шаров; при этом эти шары «чиркнут» друг о друга. Пусть звезды обладают параметрами Солнца:  $R = 0,7 \cdot 10^9$  м и  $m = 2 \cdot 10^{30}$  кг, среднее расстояние

между ними порядка одного светового года:  $l = 10^{16}$  м, а средняя относительная скорость  $v_{\infty} = 30$  км/с. Тогда получаем

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 1 + \frac{2mG}{R} \frac{1}{v_{\infty}^2} = 1 + \left(\frac{v_{II}}{v_{\infty}}\right)^2 = 425,$$

где  $v_{II}$  – вторая космическая скорость, т.е. скорость «убегания» от звезды. Эта оценка показывает, что «сечение столкновения»  $\pi b^2$  заметно превосходит таковое для случая невзаимодействующих шаров, равное  $\pi(2R)^2$ . А для среднего времени между такими столкновениями из выражения (4) получим

$$\tau \sim \frac{(10^{16})^3}{\pi \cdot 425 (2 \cdot 0,7 \cdot 10^9)^2 \cdot 3 \cdot 10^4} \text{ с} \approx 10^{32} \text{ с} \approx 3 \cdot 10^{24} \text{ лет}.$$

Конечно, экологи и политологи могут возразить: при «соприкосновении» звезд (когда  $r_{\min} = 2R$ ) перестанут существовать их планетные системы, а сами звезды еще до этого сильно вытянутся навстречу друг другу. Так что допустимое расстояние, с точки зрения целостности системы планет (по крайней мере, ближайших к своему светилу), по-видимому, должно превосходить орбиту Плутона, радиус которой составляет приблизительно десять тысяч радиусов Солнца, т.е. должно быть так:  $r_{\min} \geq 10^4 R$ . Тогда сечение взаимодействия вырастет в  $10^8$  раз и во столько же раз изменится среднее «время жизни» планетных систем в нашем гипотетическом звездном газе. Но все равно, это время много больше времени существования известных на Земле цивилизаций.

В газовой плазме, содержащей положительные и отрицательные частицы, сила взаимодействия между парой частиц тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, только она может быть как положительной, так и отрицательной (закон Кулона). В теории плазмы часто под сечением взаимодействия частиц понимают такое прицельное расстояние, для которого угол разворота частиц  $\chi$  после «столкновения» равен  $90^\circ$  (см. рис.1). А что же газ молекул?

Молекулы, как уже сказано, тоже взаимодействуют не совсем как жесткие шарики. Правда, их сила взаимодействия и потенциальная энергия изменяются с расстоянием гораздо резче, чем гравитационные силы ( $F \sim -r^{-7}$ ,  $E_{II} \sim -r^6$ ), поэтому они «чувствуют» друг друга только на близких расстояниях, сравнимых с их размерами. Если учесть, что средняя кинетическая энергия теплового движения молекул пропорциональна температуре, то

соотношение (3) можно записать в виде

$$\left(\frac{b}{2r_m}\right)^2 = 1 + \frac{\beta}{r_m^6 \cdot \frac{3}{2}kT},$$

где  $r_m$  — «радиус» молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура. Отсюда видно, что именно можно понимать под «радиусом молекулы»  $r_m$ . Действительно, для высоких температур последним слагаемым можно пренебречь, тогда  $b$  стремится к  $2r_m$ , а сечение столкновения молекул будет  $4\pi r_m^2$ . В этих условиях молекулы быстро пролетают мимо друг друга, так что сила притяжения «не успевает поработать» над их сближением. Наоборот, при понижении температуры их движения становятся замедленными, сечение столкновения  $\pi b^2$  растет, появляется возможность конденсации.

Все тела во Вселенной тоже стремятся «сконденсироваться», но, слава Богу, никак не могут этого сделать благодаря начальным импульсам, прицельным расстояниям и другим факторам.

Конечно, среднее время между столкновениями для молекул много меньше, чем для звезд. Например, в воздухе при комнатных условиях оно порядка наносекунды. Действительно, принимая радиус молекулы  $r_m \sim 3 \cdot 10^{-10}$  м, концентрацию  $n \sim 3 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>, скорость теплового движения  $v_\infty \sim 500$  м/с, по формуле (4) получим  $\tau \sim 10^{-9}$  с. При этих столкновениях сами «планетные системы» молекул (их электронные облака) существенно участвуют в процессе взаимодействия: в отличие от звезд, здесь сила притяжения сменяется силой отталкивания.

Вспомним еще, что великие физики, внесшие немалый вклад в кинетическую теорию вещества, любили лично рассчитывать

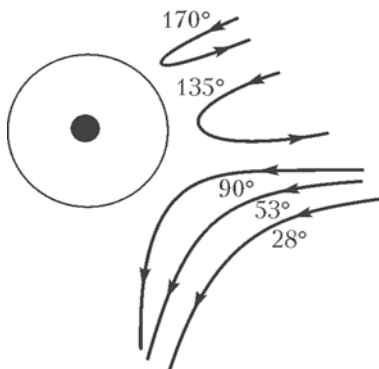


Рис. 3

траектории взаимодействующих тел. В качестве примера на рисунке 3 приведены гиперболические траектории альфа-частиц вблизи тяжелого атомного ядра, построенные самим Эрнестом Резерфордом в 1911 году. Около каждой траектории написано значение угла разворота альфа-частицы после столкновения (сравните с рисунком 1). В этом случае электрические заряды обеих частиц (альфа-

частицы и ядра) имеют один знак и  $F \sim +r^{-2}$ .

На рисунке 4 изображено несколько траекторий нейтральных молекул относительно такой же фиксированной молекулы  $S$  для случая их взаимодействия с силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния ( $F \sim +r^{-5}$ ). Эти молекулы «изобрел» сам Джеймс Клерк Максвелл (они так и

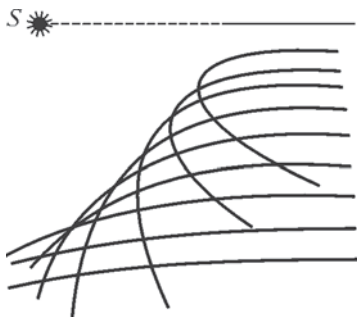


Рис. 4

называются «максвелловскими молекулами»), и он же сделал этот рисунок еще в прошлом веке.

Хотя в приведенных примерах взаимодействующие частицы считались точками, из рисунков ясно видно, что при «столкновении» они как бы натываются на невидимую преграду отнюдь ненулевых размеров. А ведь все эти молекулы, ядра, альфа-частицы, в отличие от звезд, трудно разглядеть. Как тут не восхититься человеческим разумом! Что и сделал еще один замечательный физик и философ Блез Паскаль:

«Все тела, небесный свод, звезды, Земля и ее царства не идут в сравнение с самым низким из умов, ибо ум несет в себе знание обо всем этом, тела же не знают ничего».

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА





## ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ И ТЕПЛОТА

*А. Черноуцан*

Обобщение закона сохранения энергии на тепловые процессы потребовало введения двух новых понятий. Во-первых, расширилось само понятие энергии: к знакомой вам механической энергии  $E_{\text{мех}}$  добавилась *внутренняя энергия*  $U$ . Во-вторых, оказалось, что для изменения энергии системы не обязательно совершать над ней работу – в процессе теплопередачи энергия переходит от более горячего тела к более холодному на молекулярном уровне, без какого-либо механического движения. Переданную таким образом энергию называют *количеством теплоты* (или *теплотой*)  $Q$ . Оба эти понятия входят в первый закон термодинамики:

$$Q = \Delta U + A ,$$

где  $A$  – работа системы против внешних сил. Можно записать его в более общем виде, с учетом возможного изменения механической энергии:

$$Q = \Delta (U + E_{\text{мех}}) + A .$$

По-настоящему, «в полную силу», первый закон термодинамики используется в школе только при изучении процессов, происходящих с идеальным газом, – поскольку газ может существенно изменять свой объем, совершая при этом заметную работу, все три члена в первом начале термодинамики играют одинаково важную роль. Например, при изобарном процессе изменяются как температура газа, так и его объем, и поэтому нужно учитывать как изменение внутренней энергии газа, так и его работу.

В то же время, при решении задач, где «участниками» являются жидкости и твердые тела, обычно обходятся формулами для количества теплоты, необходимого для нагревания (охлаждения) тела:

$$Q = cm(t_2 - t_1) ,$$

для плавления (кристаллизации):

$$Q = \pm \lambda m$$

и для испарения (конденсации):

$$Q = \pm r m .$$

Здесь  $c$  – удельная теплоемкость,  $m$  – масса тела,  $t$  – его температура,  $\lambda$  – удельная теплота плавления,  $r$  – удельная теплота парообразования.

Наиболее естественным и понятным образом эти формулы используются при составлении уравнения теплового баланса, описывающего теплообмен между телами замкнутой (теплоизолированной) системы. В процессе установления теплового равновесия тела системы обмениваются теплом, и формулы для количества теплоты выглядят здесь вполне уместно (хотя, как мы увидим, и в этом случае возникают вопросы).

Однако в задачах на превращение механической энергии в тепловую ситуация не столь очевидна. Рассмотрим простейший пример: неупругий удар двух одинаковых шаров, летящих навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. При обсуждении вопроса, насколько нагреются шары после соударения, обычно сначала говорят, что вся механическая энергия перешла в тепло, а потом применяют формулу для количества теплоты, необходимого для нагревания тела. Полученное уравнение  $2 \frac{mv^2}{2} = c \cdot 2m \Delta t$  позволяет решить задачу. Но возникает естественный вопрос: как можно применять формулы для количества теплоты, если никакого теплообмена в этой задаче нет и в помине? На самом деле, слова «энергия перешла в тепло» указывают не на теплообмен, а на изменение внутренней (тепловой) энергии, а первый закон термодинамики в этом случае имеет вид

$$\Delta U + \Delta E_{\text{мех}} = 0 .$$

Значит, надо использовать формулы не для количества теплоты, а для изменения внутренней энергии. Как же выглядят эти формулы?

Отвлечемся пока от плавления и испарения и выясним, как зависит внутренняя энергия от температуры. Но почему только от температуры? Правильнее поставить вопрос так: как зависит внутренняя энергия тела от температуры и давления? Ведь состояние системы определяется двумя параметрами, и внутренняя энергия должна зависеть от них обоих. Лишь в случае

идеального газа внутренняя энергия зависит только от одного параметра – от температуры, а для жидкостей и твердых тел это не так. Правда, поскольку в большинстве задач можно считать, что давление не меняется и равно, например, атмосферному, то достаточно установить зависимость внутренней энергии от температуры при постоянном давлении. Отметим, что приведенные выше формулы для количества теплоты относятся, строго говоря, к изобарным процессам, и в справочниках указаны, например, не просто удельные теплоемкости  $c$ , а удельные теплоемкости  $c_p$  при постоянном (атмосферном) давлении.

Если же в интересующей вас задаче давление, наряду с температурой, все-таки изменяется, то полезно знать, что при изменении внешнего давления в пределах нескольких атмосфер внутренняя энергия меняется довольно слабо. Например, увеличение давления воды при 300 К на одну атмосферу приводит к уменьшению внутренней энергии на величину порядка 10 Дж/кг, а нагревание всего на 1 К – к увеличению на 4200 Дж/кг.

Итак, к делу. Нагреем тело при постоянном давлении на  $\Delta t$  и запишем для этого процесса первый закон термодинамики. Количество теплоты, необходимое для нагревания, равно

$$Q = cm\Delta t.$$

Работа против внешних сил равна

$$A = p\Delta V,$$

где  $\Delta V$  – увеличение объема за счет теплового расширения:

$$\Delta V = V\beta\Delta t = (m/\rho)\beta\Delta t$$

(здесь  $\rho$  – плотность тела,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения). Тогда из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

для изменения внутренней энергии получаем выражение

$$\Delta U = \left( c - \frac{\beta}{\rho} \right) m\Delta t,$$

отличающееся от выражения для количества теплоты на ничтожно малую величину (поправка к теплоемкости проявляется только начиная с девятого знака). Поэтому для изменения внутренней энергии можно смело применять такую же формулу, как для количества теплоты, т.е.

$$\Delta U = cm\Delta t.$$

Однако надо помнить, что между этими формулами имеется одно принципиальное различие: формула для внутренней энергии применима не только при нагревании, но и при любом другом способе изменения внутренней энергии, например при неупругом ударе.

Пойдем дальше. При плавлении (кристаллизации) изменение объема может быть более значительным, чем при нагревании. Например, при замерзании воды объем увеличивается примерно на 10%, и в расчете на каждый килограмм воды при атмосферном давлении совершается работа порядка 10 Дж. Это ничтожно мало по сравнению с удельной теплотой плавления  $\lambda = 3,34 \cdot 10^5$  Дж/кг, так что поправка к удельной теплоте плавления за счет работы проявляется только в пятом знаке. Опять получаем, что для изменения внутренней энергии при плавлении можно применять такую же формулу, как для количества теплоты. И, опять же, главное отличие формулы для внутренней энергии состоит в том, что она применима независимо от того, каким образом изменилась внутренняя энергия.

Остался третий процесс – испарение жидкости. Будем считать, что испарение происходит в закрытом поршнем сосуде, в котором поддерживается атмосферное давление и соответствующая этому давлению, равному давлению насыщенных паров, температура (для воды это 373 К). Оценим произведенную паром работу, учитывая, что объем пара гораздо больше объема воды:

$$A = p(V_{\text{п}} - V_{\text{ж}}) \approx pV_{\text{п}} = \frac{m}{M} RT,$$

где  $M$  – молярная масса вещества. Изменение внутренней энергии при этом равно

$$\Delta U = \left( r - \frac{RT}{M} \right) m,$$

относительная поправка к удельной теплоте испарения составляет для воды  $RT/(Mr) \approx 0,076$ , т.е. почти 8%. Видно, что удельное изменение внутренней энергии заметно отличается от удельной теплоты испарения.

После столь многих аргументов «в защиту внутренней энергии» становится непонятным, почему же все-таки за основные приняты формулы не для  $\Delta U$ , а для  $Q$ ? Почему в технических справочниках приводят значения удельной теплоты испарения, а не удельных изменений внутренней энергии? Чтобы понять, в чем тут дело, обратимся к уравнению теплового баланса – одному из важных для практики применений формул термодинамики.

Как правильно записать закон сохранения энергии для теплообмена между телами теплоизолированной системы? На первый взгляд может показаться, что закон сохранения энергии должен иметь вид  $\Delta U = 0$ , где  $U$  – полная внутренняя энергия, т.е.

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots = 0.$$

Однако это не так. Если в систему входят тела, объем которых заметно изменяется (газы, пары), то работа системы против внешних сил не равна нулю и не равно нулю изменение полной внутренней энергии, но

$$\Delta U + A = 0.$$

Запишем первый закон термодинамики для каждого из тел, входящих в систему:

$$Q_1 = \Delta U_1 + A_1, \quad Q_2 = \Delta U_2 + A_2, \quad \dots$$

и сложим получившиеся уравнения. Так как полная работа тел друг над другом равна нулю (в соответствии с третьим законом Ньютона), то сумма  $A_1 + A_2 + \dots$  равна только работе  $A$  против внешних сил. Поскольку

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots = \Delta U,$$

то, с учетом уравнения

$$\Delta U + A = 0,$$

получаем, что закон сохранения энергии надо записывать в виде

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0.$$

Значит, в точное уравнение теплового баланса входят именно количества теплоты, полученные телами системы от других тел, а не изменения их внутренних энергий.

Так что в справочниках действительно все в порядке. Но, усомнившись и развеяв сомнения, мы почувствовали себя гораздо лучше.

## КАК ЧАЙНИК СТАЛ ТАЙМЕРОМ

*А.Стасенко*

*Timer: 1) хронометрист (на скачках); 2) часы, хронометр; 3) автоматический прибор, регулирующий продолжительность операции.*

Англо-русский словарь

Не было часов у Студента: счастливые их не наблюдают. Однако надо же знать – когда лекция, когда ужин... И тут пришло в голову Студенту использовать изменение со временем какой-нибудь физической величины, например температуры ... чайника. А для этого пригодится лабораторный термометр, с помощью которого можно измерять температуру в пределах  $0\text{ }^{\circ}\text{C} < T < 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Итак, «заведем» такие часы: нагреем воду в чайнике до  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , укутаем его одеялом (чтобы часы дольше работали) и вставим в носик термометр (рис.1).



Рис. 1

Теперь нужно часы проградуировать – найти взаимно однозначное соответствие между временем  $t$  и показаниями термометра  $T$  (рис.2). Оценим прежде всего характерное время  $\tau$ , за которое температура чайника заметно изменится. Почему он вообще остывает? Ясно, что это

связано с наличием разности между температурой чайника  $T$ , зависящей от времени, и температурой окружающего воздуха  $T_{\infty}$ , которая, в общем, тоже может изменяться, но мы будем считать ее постоянной.

Если эта разность температур существует в точках пространства, отстоящих друг от друга на расстояние  $h$ , то плотность потока тепла  $q$  (энергию, уходящую в единицу времени через

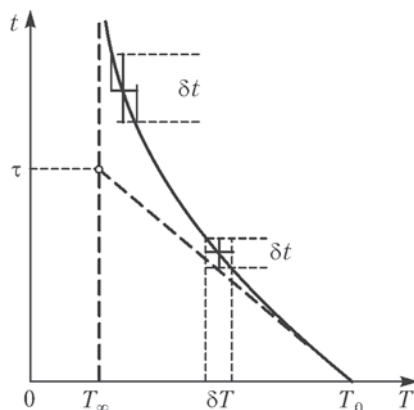


Рис. 2

единицу площади) записывают в виде

$$q = -\lambda \frac{T_{\infty} - T}{h}.$$

Собственно, это соотношение определяет величину  $\lambda$  – коэффициента теплопроводности материала, через который протекает тепловая энергия. Легко установить размерность этой величины:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

В нашем случае это коэффициент теплопроводности одеяла (вместе с содержащимся в нем воздухом). А знак «минус» напоминает, что тепло течет в сторону уменьшения температуры.

Далее, если площадь поверхности чайника равна  $S$ , то полная энергия, уходящая через эту площадь в единицу времени, равна, очевидно,  $qS$ .

Осталось записать ясную физическую идею: вследствие отвода тепловой энергии температура воды в чайнике  $T$  уменьшается. Если  $m$  – масса воды,  $c$  – ее удельная теплоемкость (теплоемкостью корпуса чайника и термометра пренебрежем), то

$$\frac{mc\Delta T}{\Delta t} = -\frac{S\lambda}{h}(T - T_{\infty}).$$

Считая, что произведение  $mc$  постоянно, запишем это уравнение в так называемом релаксационном виде:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{T - T_{\infty}}{\tau}, \quad (*)$$

где величина

$$\tau = \frac{hmc}{S\lambda}$$

просто обязана иметь размерность времени (проверьте).

Сделаем численную оценку этого времени. Будем считать для простоты, что чайник имеет форму шара радиусом  $a$ , заполненного водой. Тогда площадь его поверхности  $S = 4\pi a^2$ , масса воды в нем  $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$  (где  $\rho$  – плотность воды), так что

$$\tau = \frac{h\rho ac}{3\lambda}.$$

(В частности, отсюда видно, почему малышей нужно укутывать в три шубы особенно тщательно: поскольку их характерный размер  $a$  мал, нужно брать толщину шуб  $h$  побольше.)

Итак, выпишем значения всех необходимых величин: плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, ее удельная теплоемкость  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К), коэффициент теплопроводности одеяла примем равным  $\lambda = 0,03$  Вт/(м · К) (соответствующим хлопковой вате), его толщина пусть будет  $h = 3$  см = 0,03 м, «радиус» чайника  $a \sim 0,1$  м. Тогда

$$\tau \sim \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 4,2 \cdot 10^3}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \text{ с} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ с} \sim 40 \text{ ч}.$$

Но что это за время? Если строго решить дифференциальное уравнение (\*), получится экспоненциальная зависимость температуры от времени. Качественно она изображена на рисунке 2 сплошной линией. Характерное время  $\tau$  получается при пересечении наклонной прямой, касательной к кривой  $T(t)$  в начальной точке  $T_0 = 100$  °С, с прямой  $T_\infty = \text{const}$  (см. толстые штриховые прямые на рисунке 2). Разумеется, если потребовать полного остывания (до нулевой разности температур:  $T - T_\infty \rightarrow 0$ ), то придется ждать бесконечно долго – таково уж свойство уравнения (\*): наклон кривой  $\delta T/\delta t$  уменьшается с уменьшением разности температур. Таким образом, для экспериментальной градуировки чайника как измерителя времени, вероятно, потребуются десятки часов. Конечно, это не значит, что придется не спать все это время, но все-таки нужно будет изредка вскакивать и сверять показания термометра с какими-то «эталонными часами» (взятыми на время у приятеля).

А теперь пора поговорить о «точности хода» нового таймера. Безусловно, температура будет определяться с некоторой ошиб-



кой порядка минимального деления шкалы, например  $\delta T = 1^\circ\text{C}$  (эта ошибка показана на рисунке 2 горизонтальным отрезком). Поскольку наклон кривой  $T(t)$  изменяется, будет расти ошибка определения соответствующих отрезков времени  $\delta t$  (принцип их построения ясен из рисунка). Значит, по мере остывания чайника часы будут давать все большую неопределенность во времени. Поэтому им разумно доверять, по-видимому, лишь в течение времени порядка  $\tau$ , после чего рекомендуется «заводить» часы вновь (доводить воду до кипения).

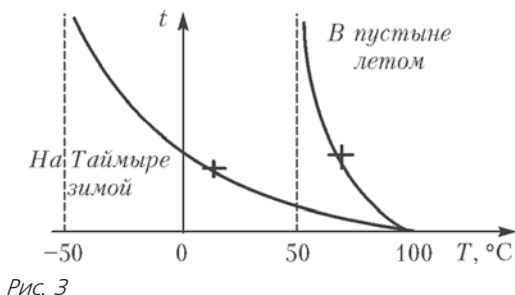


Рис. 3

Понятно, что точность этих часов будет разной в жаркой пустыне и среди снегов. Этот факт иллюстрирует рисунок 3.

Итак, спокойной ночи: следите за термометром!

## МОЛЕКУЛЫ, СОСИСКИ И АЛМАЗЫ

А.Стасенко

Алмаз – чистый углерод, встречающийся в прозрачных кристаллах от мелких зерен, видимых лишь в микроскоп, до кристаллов массой в 3000 карат (600 г).

...Согласно преданию, знаменитый «Коинур», или «Гора света», отнятый у короля Лахора английскими войсками,.. принадлежал королю Карна уже за 3 тыс. лет до н.э.

А.Ферсман. Рассказы о самоцветах

Как известно, потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов обратно пропорциональна расстоянию между ними (этот факт тесно связан с законом Кулона):

$$W_{\Pi} \sim \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Если знаки зарядов противоположны, потенциальная энергия отрицательна – имеет место притяжение, а зависимость  $W_{\Pi}(r)$  можно изобразить в виде бесконечно глубокой потенциальной «ямы» (рис.1; толстая штриховая линия).

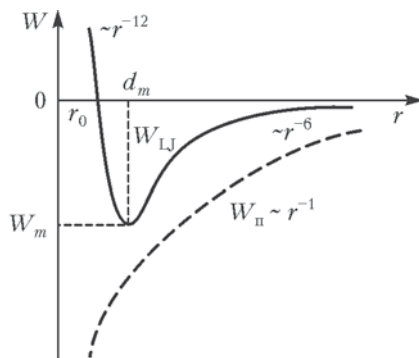


Рис. 1

Нейтральные молекулы тоже взаимодействуют друг с другом. На расстояниях  $r$ , значительно превосходящих их характерный размер  $d_m$ , они испытывают взаимное притяжение – поэтому газы и могут конденсироваться. При попытке же сблизить молекулы так, чтобы  $r$  стало меньше  $d_m$ , возникает сильное отталкивание – поэтому жидкости слабо сжимаемы. Значит, радиальная зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух нейтральных молекул должна состоять из двух ветвей: резко падающей вблизи начала координат и затем плавно растущей и приближающейся к оси абсцисс (рис. 1; сплошная кривая). Ясно, что в такой ситуации должно существовать значение межмолекулярного расстояния  $r = d_m$ , соответствующее минимуму потенциальной энергии  $W_m$  – дну той самой потенциальной ямы, куда стремятся «свалиться» молекулы, образуя конденсированное вещество.

Физики придумали много зависимостей потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними. Одна из них – потенциал Леннарда-Джонса – имеет вид

$$W_{LJ} = 4W_m \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]. \quad (*)$$

В этом случае можно найти минимум функции и получить значение характерного размера молекул:  $d_m = r_0 \sqrt[6]{2}$ . Поскольку в наших обозначениях  $r$  есть расстояние между центрами молекул, то  $d_m$  можно назвать диаметром молекул, а тогда их «собственный радиус» равен  $d_m/2$ .

Если молекула находится в глубине газа или конденсата, вдали от его границ, то она со всех сторон окружена другими молекулами. Однако если молекула расположена у поверхности конденсата, то у нее число соседей, а значит, и молекулярных связей, меньше, чем у молекул в глубине. Поэтому потенциальная энергия таких молекул будет другой.

Рассмотрим одну из поверхностных молекул (она заштрихована на рисунке 2) и найдем энергию ее взаимодействия со всеми

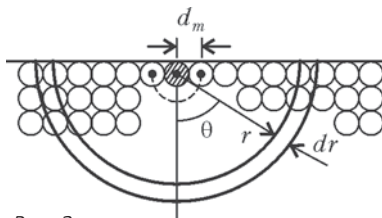


Рис. 2

остальными молекулами, заполняющими полупространство. Используя очевидную симметрию задачи, выделим шаровой слой, ограниченный полусферами с радиусами  $r$  и  $r + dr$ . Сколько молекул  $dN$  содержится в этом слое? Объем слоя равен  $2\pi r^2 dr$ , концентрация молекул равна  $n = \rho/m$  (здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $m$  – масса одной молекулы), тогда

$$dN = \frac{\rho}{m} \cdot 2\pi r^2 dr.$$

Пусть потенциал парного взаимодействия описывается зависимостью (\*). Тогда суммарная энергия взаимодействия выделенной нами молекулы со всем полупространством будет описываться легко вычисляемым интегралом:

$$\begin{aligned} W_{\Sigma} &= \frac{\rho}{m} \cdot 4W_m \int_{d_m}^{\infty} \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right) \cdot 2\pi r^2 dr = \\ &= 8\pi \frac{\rho}{m} W_m \left( -\frac{r_0^{12}}{9r^9} + \frac{r_0^6}{3r^3} \right)_{r=d_m}^{\infty} = -\frac{10}{9} \pi \rho \frac{W_m}{m} d_m^3. \end{aligned}$$

На каждую молекулу в поверхностном слое приходится площадь  $d_m^2$ . Следовательно, поверхностная плотность энергии равна по величине

$$w = \frac{10}{9} \pi \rho \frac{W_m}{m} d_m.$$

Подставим данные для воды:  $m = 18 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 3 \cdot 10^{-26}$  кг,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $d_m \approx 3 \text{ \AA} = 3 \cdot 10^{-10}$  м,  $W_m = 10^{-20}$  Дж и получим  $w \approx 0,35$  Дж/м<sup>2</sup>.

Но поверхностная плотность энергии есть величина порядка коэффициента поверхностного натяжения воды, который при комнатных условиях равен  $\sigma = 0,07$  Дж/м<sup>2</sup>. Как видим, наша оценка, хотя и завышена, весьма удовлетворительна, если учесть грубость сделанных предположений.

Однако при чем тут сосиски и алмазы? Очень даже при чем, и не только они. Например, существование капель воды тоже обеспечивается поверхностным натяжением. Так, капли дождя радиусом  $a$ , падая в атмосфере, сплющиваются аэродинамической силой сопротивления, равной силе тяжести (в установившемся режиме). Приравнивая эту силу «восстанавливающей» силе поверхностного натяжения – порядка  $2\pi a \sigma$ , – получим оценку предельного радиуса капли:

$$m_k g \sim 2\pi a \sigma, \text{ где } m_k = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho,$$

откуда

$$a \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = \sqrt{\frac{0,07 \text{ Дж/м}^2}{10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ м/с}^2}} \approx 2,6 \text{ мм},$$

что вполне реально (понаблюдайте за летним ливнем).

Это поверхностное натяжение в случае кривой поверхности вызывает дополнительное давление внутри объема жидкости. Рассмотрим небольшой участок цилиндрической поверхности с радиусом кривизны  $R_1$  и центральным углом  $\Delta\alpha$  (рис.3,а).

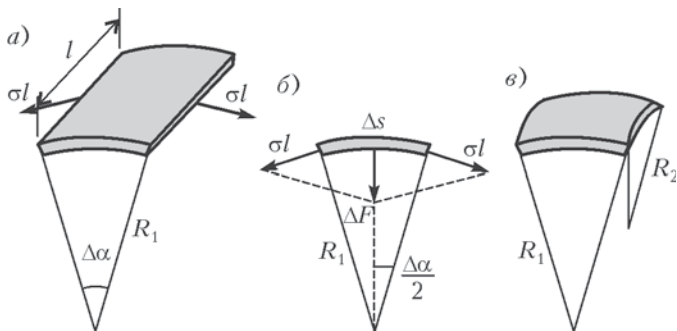


Рис. 3

Если его длина  $l$ , то на каждую сторону действует сила, равная  $\sigma l$ . Результирующая сила, как легко понять из рисунка 3,б, направлена к центру кривизны и равна

$$\Delta F = 2\sigma l \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} \approx \sigma l \Delta\alpha.$$

Учитывая, что длина дуги  $\Delta s$  связана с радиусом кривизны соотношением  $\Delta s = R_1 \Delta\alpha$ , получим

$$\frac{\Delta F}{l \Delta s} = \frac{\sigma}{R_1}.$$

Но это ведь давление!

Понятно, что если участок поверхности не цилиндрический, а искривлен еще и в другой плоскости (с радиусом кривизны  $R_2$ ; рис.3,в), то получим большее давление:

$$p_L = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(здесь индекс «L» подчеркивает наше уважение к Лапласу, чьим именем называют это избыточное давление под изогнутой поверхностью).

Из последней формулы ясно, например, почему сосиски при долгом кипении лопаются вдоль, а не поперек: натяжение их оболочки на цилиндрическом участке меньше, чем на сферических закруглениях, а давление содержимого можно считать постоянным во всех направлениях. Так же ведут себя и длинные газгольдеры – устройства для приема, хранения и выдачи газа. Конечно, в этих случаях поверхностное натяжение обеспечивается оболочкой сосиски или газгольдера.

А что же алмазы? Как известно, для их получения требуются высокие температуры и давления. Оказывается, и здесь на помощь приходит лапласовское давление. Оценим, какого размера алмаз можно получить из расплавленного углерода. Примем  $\sigma = 5 \text{ Дж/м}^2$ ,  $p = 60 \cdot 10^3 \text{ атм}$ . Считая частицу сферической,  $R_1 = R_2 = a$ , из выражения для добавочного давления получим

$$a = \frac{2\sigma}{p} = \frac{2 \cdot 5 \text{ Дж/м}^2}{6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2} \approx 15 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 15 \text{ \AA}.$$

Конечно, мелковатые алмазы, но для многих технологий весьма полезные.

Итак, варя сосиски и думая об алмазах, не теряйте чувства меры, ибо не напрасно один литературный герой как-то сказал, что бриллиант в тысячу карат – это пошло.

## ЭСТАФЕТНЫЙ БЕГ МОЛЕКУЛ, ИЛИ КАК РАБОТАЕТ ТЕРМОС

*А. Черноуцан*

Каждый понимает, как утроен термос. Особенно тот, кто хоть раз ронял колбу от термоса на пол, – звук примерно такой же, как от лопнувшей лампочки. И причина та же – и в лампочке, и в колбе давление гораздо ниже атмосферного, поэтому, кроме звона стекла, мы слышим громкий хлопок воздуха.

Если между стенками колбы находится не воздух, а вакуум, то, на первый взгляд, все понятно. Даже воздух довольно плохой проводник тепла – вспомните оконные рамы, а уж в вакууме-то проводить тепло совсем нечему. (Есть еще один механизм потери энергии горячим телом – излучение, и в чистом вакууме этот механизм не только основной, но и единственный, но мы от него отвлечемся и сосредоточимся на «эффекте термоса».) На самом деле в колбе находится не чистый, а так называемый технический вакуум, т.е. сильно разреженный, но все же воздух. Возникает вопрос: а насколько сильно надо этот воздух откачивать? Ведь чем выше требования к степени разреженности, тем труднее такую колбу сделать.

Постараемся ответить на этот вопрос, но прежде обсудим, как происходит передача энергии от более горячей стенки к более холодной, если между ними находится разреженный воздух.

Молекулы воздуха, которые ударяются о горячую стенку, приобретают от молекул стенки избыточную энергию. В среднем энергия отлетающих от этой стенки молекул становится равной  $\alpha k T_1$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T_1$  – абсолютная температура горячей стенки, а  $\alpha$  – коэффициент порядка единицы (для оценок достаточно положить  $\alpha = 1$ ). От холодной стенки молекулы отлетают со средней энергией  $\alpha k T_2$ , где  $T_2$  – температура холодной стенки. Если бы о холодную стенку ударялись те самые молекулы, которые отлетают от горячей, то за единицу времени от горячей стенки к холодной передавалась бы энергия  $\alpha k (T_2 - T_1) Z$ , где  $Z$  – число молекул, ударяющихся о стенку за одну секунду.

Для оценки этого числа молекул будем для простоты считать, что все молекулы движутся с одной и той же скоростью  $v$ , причем в направлении от горячей стенки к холодной летит  $1/6$  часть молекул (это – одно из направлений вперед–назад, вверх–вниз или вправо–влево) и  $1/6$  часть молекул летит навстречу. Остальные молекулы в этой модели летят параллельно стенкам. Если концентрация молекул воздуха  $n$ , то за единицу времени о площадку площадью  $S$  ударятся

$$Z = \frac{1}{6} n v S$$

молекул. Так как скорость зависит только от температуры (напомним, что средняя квадратичная скорость равна  $v = \sqrt{3kT/m}$ , где  $m$  – масса молекулы), то в предположении, что молекулы летят от горячей стенки прямо к холодной и бережно доносят до нее всю избыточную энергию, поток энергии от стенки к стенке (т.е. энергия, переносимая за единицу времени), равный

$$P = \alpha k (T_1 - T_2) Z = \frac{1}{6} \alpha k n v S (T_1 - T_2),$$

оказывается пропорциональным не только площади и разности температур, но и концентрации молекул, а значит, и давлению газа  $p = nkT$ . Таким образом, чем ниже плотность газа и его давление, тем хуже он проводит тепло.

Однако все это правильно только для очень разреженного газа. В обычном газе любая молекула до соударения с другой молекулой пролетает расстояние значительно меньшее, чем расстояние между стенками. Можно сказать, что передача энергии от стенки к стенке происходит эстафетным способом. (Мы отвлекаемся от передачи энергии с помощью конвекции – в узком промежутке между стенками колбы термоса конвекция несущественна.) Температура газа между стенками линейно уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$ , и энергия молекул передается по цепочке – от более «горячих» молекул к более «холодным». Но эстафетный способ менее эффективен, чем прямой, – ведь к холодной стенке подлетают не молекулы от горячей стенки, несущие полный запас избыточной энергии, а молекулы из близлежащих, более холодных областей.

Чтобы оценить влияние соударений между молекулами, введем среднюю длину свободного пробега, которую обозначим  $\lambda$ . Как видно из названия, это есть не что иное, как среднее расстояние, которое молекула проходит между двумя соударениями. Будем для простоты считать, что все летящие от стенки к стенке молекулы испытывают соударения, пролетев расстояние



$\lambda$ . Тогда расстояние между стенками  $L$  разделится  $N = L/\lambda$  областей (рис.1), причем избыточная энергия летящих по направлению к холодной стенке молекул определяется температурой той плоскости, где произошло последнее столкновение, т.е. постепенно уменьшается от области к области. Переносимая через каждый слой энергия равна разности энергий молекул, которые летят к холодной стенке и которые летят им навстречу. Так как разность температур между «стенками» области равна  $(T_2 - T_1)/N$ , то поток энергии между ними равен

$$P_N = \alpha k Z \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{1}{6} \alpha k n v S \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}.$$

Осталось понять, от чего и как зависит длина свободного пробега. Представим все молекулы шариками диаметром  $d$  каждая и будем считать, что движется только одна молекула, а остальные молекулы хаотически разбросаны по объему, неподвижны и, более того, как бы «прозрачны» для выделенной молекулы. Посчитаем, сколько молекул она «не заметила» за одну секунду (хотя должна была с ними столкнуться), пролетев расстояние  $v$ . Нетрудно понять, что наша молекула задела бы все шарики, центры которых окажутся на расстоянии меньше  $d$  от линии движения ее центра (рис.2), т.е. которые попадут в цилиндр радиусом  $d$  и высотой  $v$ . Число таких центров равно  $n(\pi d^2 v)$ . Значит, среднее расстояние между соударениями равно

$$\lambda = \frac{v}{n \pi d^2 v} = \frac{1}{n \pi d^2}.$$

Длина свободного пробега оказалась обратно пропорциональной концентрации молекул.

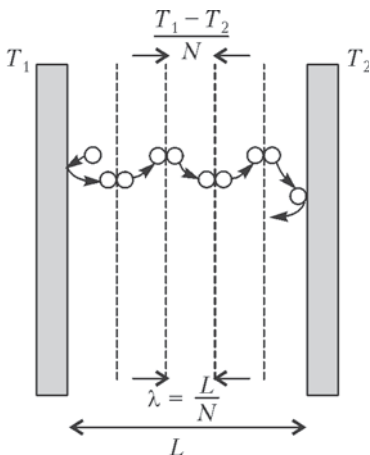


Рис. 1

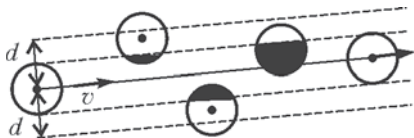


Рис. 2

Поскольку поток энергии между стенками зависит от произведения  $n\lambda$ , получается, что при постоянной температуре поток энергии от стенки к стенке не зависит ни от плотности газа, ни от его давления. Этот парадоксальный и неожиданный результат был впервые предсказан Дж.Максвеллом, и его экспериментальное подтверждение было важным успехом молекулярно-кинетической теории.

Но как же термос? Выходит, что, сколько ни откачивай воздух, никакого толка не будет? Не волнуйтесь, с термосом все в порядке. Чем больше мы откачиваем воздух, тем больше становится длина свободного пробега. Когда она превысит расстояние  $L$  между стенками, вступит в действие прямой способ передачи энергии — непосредственно от стенки к стенке, при котором, как мы убедились, поток энергии пропорционален плотности газа (и не зависит от расстояния между стенками).

Оценим, до каких давлений надо добраться. Если  $\lambda \approx L$ , то  $n \approx 1/(\pi d^2 L)$ . Пусть расстояние между стенками  $L = 3$  мм, а диаметр молекул (из таблиц)  $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$  м. Тогда для температуры  $T = 300$  К получим  $p = nkT \approx 5$  Па. Только с этого давления начнется уменьшение теплопроводности. Например, при давлении 0,1 Па поток тепла будет в несколько десятков раз меньше, чем без откачки. Но это давление в миллион раз меньше, чем атмосферное.

Один мой знакомый предложил применить принцип работы термоса для утепления окон. Достаточно откачать воздух между рамами, — убеждал он, — и тепло через стекла уходить не будет. Я возразил, что при сильной откачке трудно (и дорого) будет обеспечить герметичность, но главное — стекла будут со страшной силой прижиматься друг к другу атмосферным давлением. (Оцените сами, какие возникнут нагрузки.) А зачем сильно откачивать? — ответил автор проекта, — откачаем немного, и уже станет лучше!

Теперь вы знаете, как ему возразить?

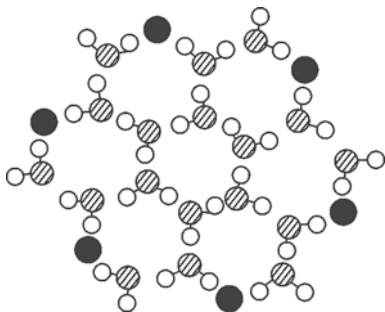
## СНЕЖИНКИ И ЛЕДЯНЫЕ УЗОРЫ НА СТЕКЛЕ

*С.Варламов*

Всем вам, конечно же, приходилось разглядывать снежинки или ледяные узоры на окнах. Лед в этих случаях образуется непосредственно из воздуха, в котором всегда присутствуют водяные пары.

При медленной конденсации водяных паров молекулы воды образуют почти плоскую структуру (кластер), которая имеет осевую симметрию шестого порядка, т.е. при повороте на  $60^\circ$  она переходит сама в себя. Заметим, что это только один из множества возможных способов объединения молекул воды в кристалл льда.

На схематическом рисунке атомы кислорода в молекулах воды изображены заштрихованными, атомы водорода – белыми. Хорошо видно, что некоторые места в структуре (они отмечены черным) могут заполнить только молекулы воды, ориентированные не в плоскости рисунка, потому что к тому месту, где должен находиться отрицательно заряженный атом кислорода, уже обращены два положительных атома водорода соседних молекул. Заполнение этих мест молекулами при росте кристалла льда происходит с меньшей скоростью или вовсе не происходит (это связано с глубиной соответствующей потенциальной ямы для этого места).



Поперечные размеры правильной снежинки отличаются во много раз, т.е. отношение диаметра снежинки к ее толщине может достигать нескольких десятков. Это отношение характеризует скорость роста снежинки в соответствующем направлении. При росте кристалла возможны разные способы (последовательности) заполнения энергетически выгодных позиций, что

обеспечивает получение кристаллов (снежинок) разной формы. Реализация конкретного способа роста — случайное событие, поэтому совершенно одинаковые по форме снежинки встречаются крайне редко. Попробуйте продолжить построение нарисованного кластера, и вы сразу увидите, как появляются возможности разветвления: достаточно увеличить радиус кластера на величину, соответствующую диаметру одной шестиугольной соты, и возникает очередное ветвление.

Давайте оценим сверху количество  $N$  возможных вариантов форм наших гипотетических снежинок-кластеров радиусом  $R = 2$  мм. Размер соты имеет порядок  $D = 6 \cdot 10^{-10}$  м. Отношение  $R/D$  равно степени двойки (ветвления):

$$\frac{R}{D} \approx 3,3 \cdot 10^6, \text{ и } N \leq 2^{3300000} \approx 10^{1000000}.$$

Конечно, это фантастически завышенная оценка. Дело в том, что реализация того или иного направления при ветвлении имеет разную вероятность. Связано это с тем, что взаимодействуют не только соседние молекулы, но и молекулы, удаленные друг от друга на значительные расстояния.

Условия конденсации пара и превращения его в лед на поверхности стекла отличаются от условий, при которых в воздухе образуются снежинки. Внутри помещения влажность воздуха обычно существенно меньше 100%, но вблизи холодной поверхности оконного стекла температура может оказаться гораздо ниже точки росы при данной концентрации молекул воды в воздухе. И на стекле появится лед.

Вид узора на поверхности стекла зависит от большого набора параметров. Перечислим некоторые из них: температура внутри помещения и температура снаружи, влажность воздуха в помещении, толщина стекла и загрязненность его поверхности, наличие и скорость воздушных потоков вблизи стекла (в частности, наличие или отсутствие щелей в оконной раме или трещин в стекле) и т.д.

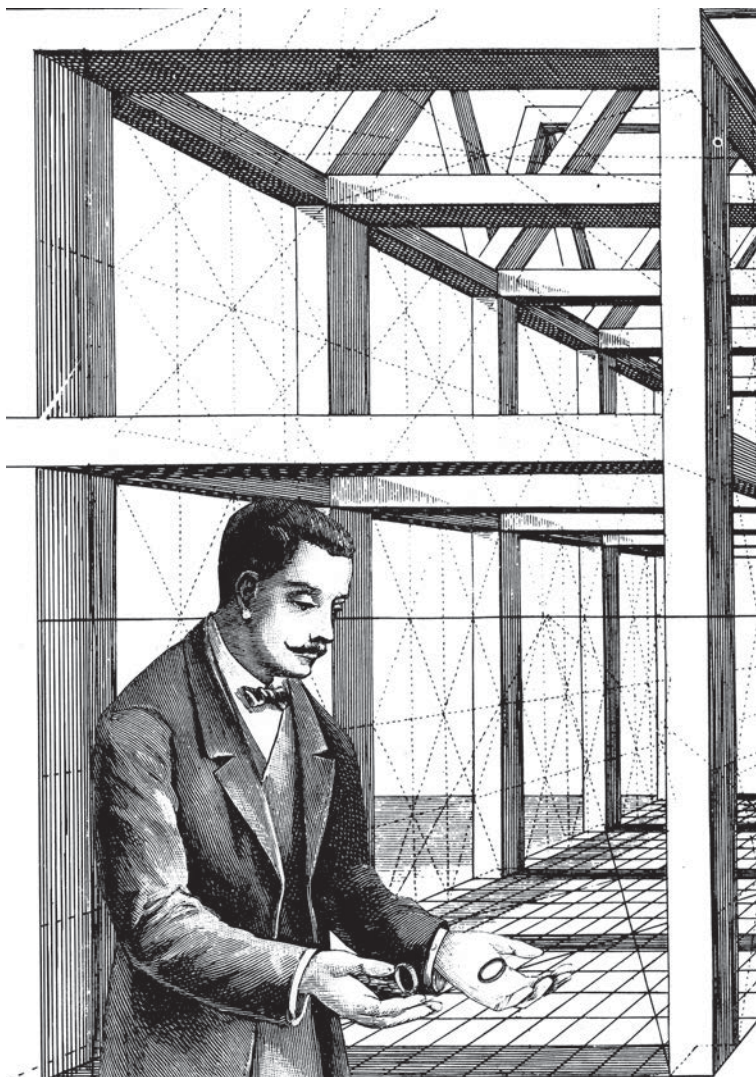
Замечательные ледяные узоры часто образуются зимой на стеклах автобусов или троллейбусов. При этом слой льда может достигать нескольких миллиметров. Источником водяного пара является, разумеется, дыхание пассажиров. Сначала на поверхности стекла образуется водяная пленка толщиной в несколько диаметров молекул. Молекулы воды в ней испытывают сильное влияние молекул поверхности стекла. Хотя вода в пленке переохлаждена, но возможности для превращения воды в лед не возникает. По мере увеличения толщины пленки и уменьшения

влияния молекул поверхности стекла в воде возникают центры кристаллизации. Рост кристаллов происходит во всевозможных направлениях, но самые большие кристаллы растут вдоль поверхности стекла. Скорости роста кристалла в различных направлениях тоже существенно различаются. Можно повторить, что взаимное влияние соседних и удаленных друг от друга молекул определяет вероятность заселения той или иной «вакансии» в растущем кристалле. С этим, по-видимому, связана форма (степень кривизны) растущих на поверхности стекла ледяных узоров. Когда толщина ледяного панциря на стекле становится настолько большой, что отвод тепла наружу замедляется, кристаллы льда начинают расти в перпендикулярном стеклу направлении. Стекло как бы покрывается шубой из ледяных иголок.

Когда наступит зима, вы сможете легко убедиться в том, что снежинки действительно имеют разнообразные симметричные красивые формы. Сама снежинка, можно сказать, представляет собой застывший случайный процесс.

А если, сидя в автобусе возле покрытого морозными узорами стекла, вы сможете своим теплым дыханием «продышать» во льду окошечко для наблюдения, обратите внимание на то, как быстро это окошко вновь зарастает льдом — кристаллы льда растут быстрее, чем движется минутная стрелка ваших наручных часов.

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



## КОНДЕНСАТОР В КОРОБКЕ И ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ

*Е.Ромишевский*

– Как вы считаете, кто задает больше всех вопросов?

– Наверное, ребенок?

– Нет, это физик! Да к тому же еще и сам старается на них ответить.

Интервью с прохожим

Рассмотрим некоторые интересные физические примеры и опыты, связанные с постоянным электрическим полем. Возьмем плоский конденсатор, т.е. две параллельные тонкие металлические пластины площадью  $S$ , расстояние между которыми  $d$  существенно меньше размеров этих пластин. Как можно зарядить такой конденсатор? Какой минимальный заряд для этого потребуется?

Поместим, например, на левую пластину положительный заряд  $+Q_0$ , а на правую – такой же по величине отрицательный заряд, т.е.  $-Q_0$ . Эти заряды почти равномерно распределятся по внутренним сторонам пластин с поверхностной плотностью  $\sigma_0 = Q_0/S$  и создадут между пластинами однородное электрическое поле напряженностью

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S}.$$

В результате между пластинами возникнет разность потенциалов

$$U_0 = E_0 d = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} d = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S/d} = \frac{Q_0}{C},$$

где  $C = \epsilon_0 S/d$  – емкость плоского конденсатора.

Конденсатор – это хранитель зарядов. И емкость конденсатора определяет, насколько высока разность потенциалов между его обкладками (пластинами), когда мы храним в нем заряд, обуславливающий эту разность потенциалов. Если емкость велика, то даже при большом заряде разность потенциалов мала, и мы можем «загрузить» еще больший заряд, не боясь, что при

больших значениях разности потенциалов, а значит, и напряженности поля возникнет пробой и конденсатор потеряет свой заряд и свою энергию.

Мы можем зарядить конденсатор по-другому, поместив положительный заряд  $+Q_0$ , например, на левую (положительную) пластину, а правую просто заземлить. При этом отрицательный заряд  $-Q_0$  сам придет из земли, и между пластинами возникнет та же разность потенциалов  $U_0$ . Можно подключить к незаряженным пластинам батарею с электродвижущей силой  $\mathcal{E}_0 = U_0$ , тогда через батарею пройдет заряд  $Q_0$  и конденсатор зарядится. Мы можем сказать, что для зарядки конденсатора емкостью  $C = \epsilon_0 S/d$  до разности потенциалов  $U_0$  ему достаточно сообщить заряд  $Q_0$ .

Разместим теперь слева и справа от нашего заряженного плоского конденсатора, обозначим его пластины цифрами 2 и 3, еще две протяженные параллельные пластины 1 и 4 тоже на расстояниях  $d$  от пластин конденсатора и соединим их проводником (рис.1). Иными словами, как бы поместим наш конденса-

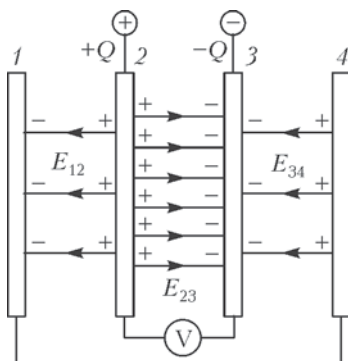


Рис. 1

тор в металлическую коробку. Спрашивается, какой теперь будет картина распределения зарядов на пластинах и электрических полей между пластинами и изменится ли емкость конденсатора с выводами от пластин 2 и 3, если раньше она была равна  $C = \epsilon_0 S/d$ ?

Сначала подсоединим вольтметр, конечно идеальный (это значит, что его омическое сопротивление бесконечно большое, а электроемкость бесконечно малая), к «свободным» пластинам 2 и 3, т.е. без пластин 1 и 4. Вольтметр, разумеется, покажет разность потенциалов  $U_0$ . Потом, не меняя заряд  $Q_0$ , присоеди-



ним вольтметр к пластинам 2 и 3, находящимся внутри соединенных пластин 1 и 4. Может показаться удивительным, что, хотя пластины 1 и 4 и не заряжены, показание вольтметра изменится, причем значительно. Вольтметр покажет теперь разность потенциалов  $U = 2U_0/3$ . Это значит, что емкость такого сложного конденсатора изменилась и стала равной

$$C^* = \frac{Q_0}{2U_0/3} = \frac{3}{2} \frac{Q_0}{U_0} = \frac{3}{2} C,$$

т.е. увеличилась в  $3/2$  раза. Итак, сажая на пластины 2 и 3 заряды  $+Q_0$  и  $-Q_0$  в присутствии пластин 1 и 4 мы получили разность потенциалов в  $2/3$  раза меньше, чем для свободного конденсатора с теми же пластинами. Это – экспериментальный факт, и мы его теперь должны осмыслить.

Если разность потенциалов между пластинами 2 и 3 равна

$$U = Ed = \frac{2}{3} U_0 = \frac{2}{3} E_0 d = \frac{2}{3} \frac{Q_0 d}{\epsilon_0 S} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0 d}{\epsilon_0},$$

то это значит, что на правой стороне пластины 2 находится заряд  $+2Q_0/3$ , а на левой стороне пластины 3 находится заряд  $-2Q_0/3$ . А куда же делся заряд  $+Q_0/3$  пластины 2? Он может быть только на левой стороне пластины 2! Но тогда на правой стороне пластины 1 должен находиться соответствующий отрицательный заряд  $-Q_0/3$ . Опять вопрос: а откуда взялся этот заряд на первой пластине? Ответ: только если он перетек с пластины 4, так что на ее левой стороне появился заряд  $+Q_0/3$ . В результате между пластинами 1 и 2, а также 3 и 4 возникли одинаковые электрические поля:  $\vec{E}_{12} = \vec{E}_{34}$ , которые направлены противоположно полю  $\vec{E}_{23}$  и в два раза меньше его по величине. Анализируя экспериментальный факт (результаты показаний вольтметра в рассмотренных случаях), мы пришли к очень важному заключению, что если с некоторым пробным зарядом  $q$  пройти по замкнутому контуру от пластины 1 к пластине 4 внутри «сложного конденсатора» и вернуться к пластине 1 по проводнику, соединяющему эти пластины, то суммарная работа в электрических полях  $\vec{E}_{12}$ ,  $\vec{E}_{23}$  и  $\vec{E}_{34}$  будет равна нулю:

$$A = qE_{12}d + qE_{34}d - qE_{23}d = 0.$$

Внутри объемов проводников электрических полей, конечно, нет. Дело в том, что кулоновское электрическое поле – поле стационарных электрических зарядов, подчиняющееся закону

Кулона, — обладает очень важным и замечательным свойством (как и поле тяготения, подчиняющееся похожему закону тяготения Ньютона): оно *потенциально*, т.е. работа по перемещению электрического заряда в этом поле зависит только от положения начальной и конечной точек, но не от формы пути перехода между ними. Естественно, знаки работы при переходе в прямом и обратном направлениях разные, поэтому работа по *любому замкнутому* пути (любой формы) всегда будет равна нулю. Это означает, что любой точке пространства, в котором имеется электрическое кулоновское поле, можно приписать определенное значение потенциала  $\Phi$ , равного работе по перемещению единичного положительного заряда из этой точки пространства, где есть поле, в бесконечность, где поля уже нет, по пути любой формы.

Рассматривая нашу систему из четырех пластин, можно было бы исходить из этого замечательного принципа, свойственного кулоновскому полю. Тогда, вставляя между пластинами 1 и 4 заряженные пластины 2 и 3, мы должны обязательно потребовать переход заряда  $-Q_0/3$  с четвертой пластины на первую, иначе мы нарушим наш замечательный принцип. Что невозможно!

А каков физический механизм перетекания заряда с пластины на пластину? На этот вопрос ответить несложно. В металле имеется огромное количество свободных электронов, имеющих столь малую массу, что они практически безынерционны, поэтому достаточно чрезвычайно малых электрических полей, чтобы вызвать их перемещение. Вот этими полями и являются «краевые поля» нашего плоского конденсатора в окружающем его пространстве.

Следует иметь в виду, что потенциальность электрического кулоновского поля — это не только замечательный принцип, но

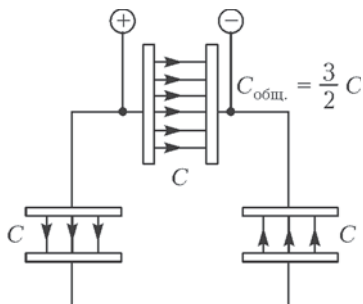


Рис. 2

и способ анализа и решения многих вопросов и задач. К примеру, легко придумать и изобразить эквивалентную схему включения конденсаторов из наших четырех пластин (рис.2), имеющую общую емкость  $3C/2$ .

Вернемся опять к нашему плоскому конденсатору (имеющему уединенные пластины 2 и 3) с зарядом  $Q_0$ , емкостью  $C = \epsilon_0 S/d$  и разностью потенциалов  $U_0$  и попробуем графически изобразить распределение потенциала его электрического поля вдоль оси, проходящей через середины пластин. Начало координат выберем в центре конденсатора, а ось  $x$  направим

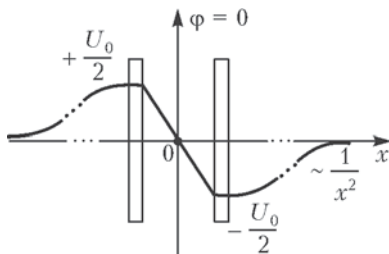


Рис. 3

вправо (рис.3). Плоскость  $yz$ , перпендикулярная оси  $x$  и проходящая через центр конденсатора, является эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала. В каждой ее точке силовые линии поля перпендикулярны к ней и работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности в бесконечность равна нулю. Внутри конденсатора поле однородное, значит, график потенциала будет линейным, причем в центре потенциал равен нулю, а на поверхностях пластин составляет  $+U_0/2$  и  $-U_0/2$ . Внутри металлических пластин поля нет, и потенциал там постоянен ( $\pm U_0/2$ ). Вне пластин электрическое поле очень мало, но на большом расстоянии от центра слева и справа потенциал стремится к нулю, уменьшаясь пропорционально  $1/x^2$  (подумайте самостоятельно — почему).

## УЧАСТОК ЦЕПИ С ИСТОЧНИКОМ ТОКА

*А. Черноуцан*

Пожалуй, большинство школьников согласятся, что основные законы постоянного тока достаточно просты. И законы Ома, и закон Джоуля–Ленца легко запомнить и несложно применять. Но, к сожалению, эта простота кончается при переходе к участку цепи, содержащему источник тока. Начнем с того, что закон Ома для такого участка – назовем его обобщенным законом Ома для участка цепи – в школе вообще не проходят, а он очень полезен как для решения задач, так и для более глубокого понимания теоретических вопросов. Как мы увидим, опираясь на обобщенный закон Ома, можно лучше разобраться в энергетических соотношениях для участка цепи с источником тока.

### Обобщенный закон Ома

Обсудим сначала физический смысл закона Ома, относящегося к участку цепи, содержащему только идеальный резистор. Закон Ома утверждает, что для поддержания тока на участке к нему надо приложить постоянное напряжение, причем сила тока и напряжение пропорциональны друг другу:  $U = IR$ , где  $R$  – сопротивление участка. Но это означает, что для поддержания направленного движения свободных зарядов на них должна действовать постоянная сила со стороны электрического поля  $\vec{E}$ . В случае участка цепи без источников это поле является электростатическим:  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}}$ , оно создается самими зарядами проводника. (В процессе установления тока заряды вдоль всей цепи за очень короткое время перераспределяются таким образом, чтобы создать нужное поле.) Переформулируем закон Ома следующим образом: *если ток на участке цепи поддерживается полем  $\vec{E}$ , то сила тока пропорциональна работе этого поля по переносу единичного заряда с одного конца участка на другой*. Напомним, что в случае электростатического поля эта работа равна разности потенциалов.

Обозначим один конец участка цифрой 1, а другой цифрой 2 и запишем закон Ома в виде

$$U_{12} = I_{12}R, \quad (1)$$

где  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $I_{12} = +I$ , если ток течет от 1 к 2, и  $I_{12} = -I$  для тока, текущего навстречу движению, т.е. от 2 к 1. Такая форма записи, позволяющая передвигаться по участку цепи в любом направлении, очень удобна.

Теперь предположим, что на этом же участке цепи действуют сторонние силы. Вспомним, что численной характеристикой сторонних сил является ЭДС (электродвижущая сила), которая определяется как работа *сторонних сил по переносу единичного заряда с одного конца участка цепи на другой*. Определим величину

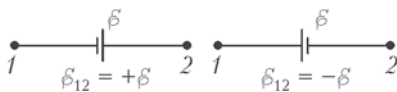


Рис. 1

$\mathcal{E}_{12}$  как работу сторонних сил по переносу единичного заряда от 1 к 2, т.е.  $\mathcal{E}_{12} = +\mathcal{E}$ , если сторонние силы направлены по движению (от 1 к 2), и  $\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}$  в противоположном случае (рис.1).

Направленное движение зарядов на участке цепи теперь поддерживается как электростатическим полем  $\vec{E}_{эл}$ , так и полем сторонних сил  $\vec{E}_{ст}$ . Точнее, оно определяется суммарным полем  $\vec{E} = \vec{E}_{эл} + \vec{E}_{ст}$ , и поскольку заряды не могут «отличить» суммарное поле от чисто электростатического, то разумно предположить, что сила тока так же зависит от суммарного поля, как раньше (в отсутствие источников) она зависела от электростатического поля. А именно, *сила тока пропорциональна работе суммарного поля  $\vec{E}$  по переносу единичного заряда с одного конца участка на другой*. Эта работа состоит из двух частей – из работы электростатического поля, равной разности потенциалов, и из работы сторонних сил, равной, по определению, ЭДС:

$$I_{12}R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \quad (2)$$

где  $R$  – сопротивление участка цепи, включая внутреннее сопротивление источника.

Еще раз сформулируем правила знаков. Если направление тока на рассматриваемом участке неизвестно, то его выбирают произвольным образом (если после расчетов получится  $I < 0$ , значит, действительное направление тока противоположно выбранному, но величина тока найдена правильно). При движении от точки 1 к точке 2 надо записать  $I_{12} = I$ , если мы идем по току, и  $I_{12} = -I$ , если идем против. Если мы идем по сторонним силам,

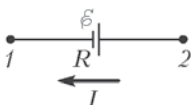


Рис. 2

то  $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}$ , а если против, то  $\mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}$ . Например, для участка цепи 1–2 на рисунке 2 получаем

$$-IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Разберем теперь несколько примеров на применение обобщенного закона Ома.

**Вывод закона Ома для полной цепи.** Рассмотрим замкнутую неразветвленную цепь. Начнем с простейшего случая, когда в цепи имеется только один источник тока (рис.3). Ток течет в

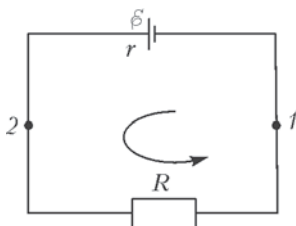


Рис. 3

направлении сторонних сил этого источника; пройдя контур в этом направлении, запишем обобщенный закон Ома для участка с источником и для участка с внешним сопротивлением:

$$Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad IR = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$I(r + R) = \mathcal{E}.$$

Разности потенциалов сократились, потому что работа электростатических сил по замкнутому контуру равна нулю. В случае многих источников направление тока заранее неизвестно; выбираем его произвольно и проходим контур в этом направлении. Записав соответствующие уравнения, получим

$$I \sum R_i = \sum \pm \mathcal{E}_i$$

(разности потенциалов опять сократятся, поскольку потенциал каждой точки встретится дважды, но с разными знаками). Если сила тока окажется отрицательной, то направление тока надо изменить на противоположное.

**Правила Кирхгофа.** Перейдем теперь к рассмотрению разветвленной цепи. В качестве конкретного примера применения общих правил будем использовать цепь на рисунке 4. Задача – найти токи на всех участках цепи.

В любом случае начинают с того, что произвольным образом выбирают направления неизвестных токов. Так как при протекании токов через любой узел на нем не должен накапливаться заряд, алгебраическая сумма входящих в этот узел токов и токов, выходящих из узла, должна быть равна нулю. (Принято входящие токи брать со знаком плюс, а выходящие – со знаком минус.) Это – *первое правило Кирхгофа*, или *правило узлов*. Его можно записать для каждого из  $n - 1$  узлов. Для получения оставшихся

уравнений поступают так: выбирают произвольный замкнутый контур и обходят его в произвольном направлении. Если записать на каждом участке обобщенный закон Ома, а потом сложить полученные уравнения, то разности потенциалов сократятся, и мы придем к уравнению

$$\sum \pm I_i R_i = \sum \pm \mathcal{E}_i,$$

где правила знаков соответствуют описанным раньше. Это – *второе правило Кирхгофа*. Для схемы на рисунке 4 получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 r_1 + I_3 R = \mathcal{E}_1, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

(направление обхода контуров – против часовой стрелки).

**Метод узловых потенциалов.** Если в методе Кирхгофа неизвестными в уравнениях являются токи, то в данном методе составляются уравнения для потенциалов узлов. При этом один из потенциалов принимают равным нулю (потенциал определен с точностью до константы), так что число уравнений получается на одно меньше, чем число узлов. С помощью обобщенного закона Ома выражают каждый из проходящих через узел токов, после чего записывают правило узлов – алгебраическая сумма входящих и выходящих токов равна нулю.

Для схемы на рисунке 4 примем потенциал левого узла равным нулю, а потенциал правого обозначим через  $\varphi$ ; тогда получим *одно* уравнение

$$\frac{(\varphi - 0) + \mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{(\varphi - 0) + \mathcal{E}_2}{r_2} - \frac{0 - \varphi}{R} = 0$$

(сумма токов, входящих в левый узел и выходящих из него, равна нулю). Находя потенциалы всех узлов, с помощью обобщенного закона Ома вычисляем токи (заметим, что выражения для токов нами были уже записаны при составлении уравнения).

**Батарея источников тока.** Несколько соединенных между собой источников, подключенных к внешней цепи, удобно заменить одним эквивалентным источником. В школьном курсе приводится ответ для параллельного и последовательного соединения *одинаковых* источников. Для последовательного соедине-

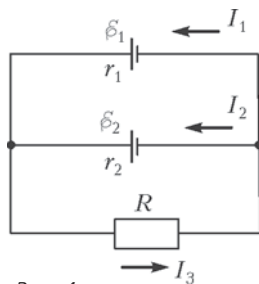


Рис. 4

ния ответ легко обобщается на случай разных источников. Для случая параллельного соединения разных источников поступим следующим образом.

Запишем обобщенный закон Ома для каждого источника:

$$I_k r_k = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_k$$

(разности потенциалов на всех источниках одинаковы), разделим на  $r_k$  и сложим все уравнения:

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum \left( \frac{1}{r_k} \right) + \sum \left( \pm \frac{\mathcal{E}_k}{r_k} \right)$$

(ток через батарею равен сумме токов). Если разделить на  $\sum \left( \frac{1}{r_k} \right)$ , то уравнение приобретает вид закона Ома для участка цепи с эквивалентным сопротивлением, вычисляемым по формуле для параллельного соединения сопротивлений:

$$\frac{1}{r} = \sum \left( \frac{1}{r_k} \right),$$

и с эквивалентной ЭДС:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum \left( \pm \frac{\mathcal{E}_k}{r_k} \right)}{\sum \left( \frac{1}{r_k} \right)}.$$

В случае  $N$  одинаковых источников с параметрами  $\mathcal{E}_0, r_0$  получаем обычный ответ:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, r = r_0/N$ . Для примера на рисунке 4 можно два источника заменить одним эквивалентным, после чего легко найти ток  $I_3$ . (Сделайте это сами и убедитесь, что ответ получается такой же, как с помощью двух других методов.)

### Энергетический баланс на участке цепи

Если на участке цепи действуют сторонние силы, то следует говорить о трех членах в энергетическом балансе.

1) Чтобы найти выделившееся количество теплоты, надо вычислить работу суммарного поля над зарядами цепи. Как утверждает обобщенный закон Ома, работа суммарного поля над единичным зарядом равна  $I_{12}R$ ; значит, за время  $t$  суммарное поле совершит работу

$$Q = I_{12}Rq = I_{12}R(I_{12}t) = I_{12}^2 R t$$

(закон Джоуля–Ленца). Эта величина всегда положительна.



2) Работу сторонних сил над зарядами нужно трактовать как поступление энергии от неэлектростатических источников энергии. Она равна

$$A_{\text{ст}} = \mathcal{E}_{12}q = \mathcal{E}_{12}I_{12}t.$$

Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной.

3) Работа электростатических сил над зарядами равна

$$A_{\text{эл}} = (\varphi_1 - \varphi_2)q = U_{12}I_{12}t.$$

Чтобы понять энергетический смысл этого выражения, заметим, что, в соответствии с обобщенным законом Ома,

$$I_{12}Rq = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12})q,$$

или

$$Q = A_{\text{эл}} + A_{\text{ст}}.$$

Значит, исходя из закона сохранения энергии, можно утверждать, что *работа электростатических сил на участке цепи равна энергии, поступившей в данный участок из оставшейся части цепи* (т.е. из внешней цепи). Если эта работа отрицательна, то во внешней цепи работа электростатических сил положительна, т.е.  $UI$  имеет смысл энергии, переданной во внешнюю цепь. Таким образом, электростатические силы регулируют обмен энергией между частями цепи.

Обсудим два примера.

**КПД источника тока.** Для вычисления коэффициента полезного действия надо разобраться, какая величина в данном конкретном случае играет роль полной (затраченной) работы, а какая – полезной работы. Рассмотрим ситуацию, когда источник тока является источником энергии для внешней цепи (содержащей, например, идеальный резистор, на котором только выделяется тепло). В этом случае (рис.5,а) сторонние силы источника совершают положительную работу  $A_{\text{ст}} = \mathcal{E}It$ , имеющую смысл полной (затраченной) работы, часть энергии  $Q = I^2rt$  теряется в источнике в виде тепла, а часть  $A_{\text{полезн}} = (\mathcal{E}I - I^2r)t = UIt$  передается во внешнюю цепь. Электростатические силы в самом источнике совершают отрицательную работу, а во внешней цепи – положительную.

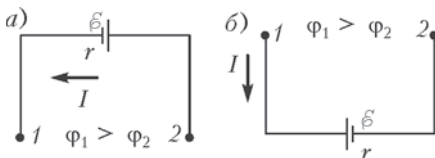


Рис. 5

**КПД электромотора.** Рассмотрим теперь случай, когда участок цепи получает энергию из внешней цепи и эта энергия не преобразуется целиком в тепло, а частично идет на совершение работы. Это возможно только тогда, когда на участке есть сторонние силы (на идеальном резисторе вся энергия переходит в тепло). Эти сторонние силы действуют против тока, совершая отрицательную работу (рис.5,б), а работа против сторонних сил – положительная.

Например, при работе электромотора в обмотках вращающегося якоря возникает ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}$ . В этом случае положительная работа электростатических сил  $A_{эл} = UIt$  имеет смысл полной (затраченной) работы, часть энергии  $Q = I^2rt$  теряется в виде тепла, а часть  $A_{полезн} = (UI - I^2r)t = \mathcal{E}It$  представляет из себя полезную работу – механическую работу электромотора.

Аналогичные соотношения можно записать и во многих других случаях (например, при зарядке аккумулятора).

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*А.Зильберман*

В этой статье рассказывается о методе, позволяющем упрощать сложные задачи по расчету электрических цепей.

Что мы понимаем под «преобразованием цепи»? Предположим, что у нас есть сложная схема из резисторов, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменяем эту схему другой, но с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как у старой. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене и токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но найти эти токи, возможно, окажется проще.

Итак, если мы хотим подсчитать токи в сложной схеме, ее можно заменить более простой эквивалентной схемой. При этом токи внутри заменяемой части меняются. Поэтому так поступать можно только с той частью схемы, которая нас непосредственно не интересует.

С подобными заменами вы, конечно же, встречались. Пусть, например, в схеме два сопротивления<sup>1</sup>  $r_1$  и  $r_2$  включены последовательно. Их мы можем заменить одним, равным по величине сумме  $r_1 + r_2$ . Если же два сопротивления включены параллельно, то их также можно заменить одним, величина которого равна  $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ . Это – простейшие примеры преобразования цепей. Мы же остановимся на более сложных схемах.

Посмотрим, как преобразуются друг в друга схемы, имеющие по три вывода, – «звезда» и «треугольник» (рис.1). Немного непривычные обозначения на рисунке 1,б очень удобны – индексы показывают, между какими точками включено сопротивление. Например, сопротивление  $R_{13}$  включено между точками 1 и 3 и т.д.

Если мы хотим заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между  $r$  и  $R$ , чтобы сопротив-

---

<sup>1</sup> Здесь и далее более правильно говорить «два резистора с сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$ ». (Прим. ред.)

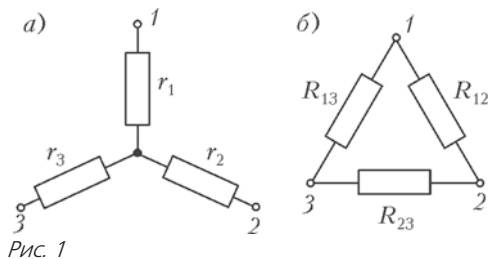


Рис. 1

ления между любыми точками были для обеих схем одинаковы.

В схеме «звезда» (см. рис.1,а) сопротивление между точками 1 и 2 равно  $r_1 + r_2$ , а в схеме «треугольник» (см. рис.1,б) оно равно  $\frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$ . Следовательно, для того чтобы сопротивления между точками 1 и 2 были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1)$$

Аналогично для точек 2 и 3:

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}(R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \quad (2)$$

и для точек 1 и 3:

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) легко решается. Сложим все уравнения и поделим обе части на 2:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{13} + R_{12}R_{23} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Вычтя теперь из этого уравнения уравнение (2), получим

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Аналогично:

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

и

$$r_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Эти результаты легко запомнить – знаменатель всюду один и тот же, а в числителе справа дважды встречается тот же индекс, что и слева:  $r_1 \rightarrow R_{12}R_{13}$ ,  $r_2 \rightarrow R_{12}R_{23}$ ,  $r_3 \rightarrow R_{13}R_{23}$ .

Немного сложнее получить формулы для обратного преобразования:

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_3},$$

$$R_{13} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2},$$

$$R_{23} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1},$$

но их также легко запомнить – числитель всюду один и тот же, а в знаменателе стоит как раз тот индекс, которого недостает слева.

Пользуясь формулами, которые мы только что получили, можно производить замену одной схемы другой. Например, «звезду» с сопротивлениями 1 Ом можно заменить «треугольником» с сопротивлениями 3 Ом (рис.2).

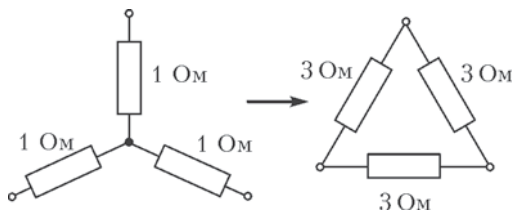


Рис. 2

Решим теперь такую задачу: найдем сопротивление между точками  $A$  и  $B$  в схеме на рисунке 3. Это обычная схема «мостика», но в нашей задаче «мостик» неуравновешен. Такие задачи приходится решать при помощи правил Кирхгофа. В школьной программе их нет, да и вычисления с помощью этих правил очень громоздкие – в нашем случае получилась бы система пяти уравнений с пятью неизвестными. Мы поступим проще: заменим «треугольник»  $ACD$  «звездой», как показано на рисунке 4. Теперь

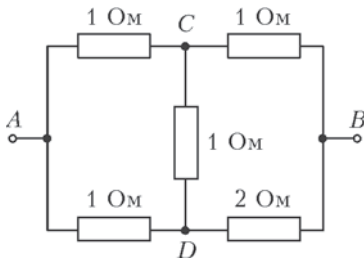


Рис. 3

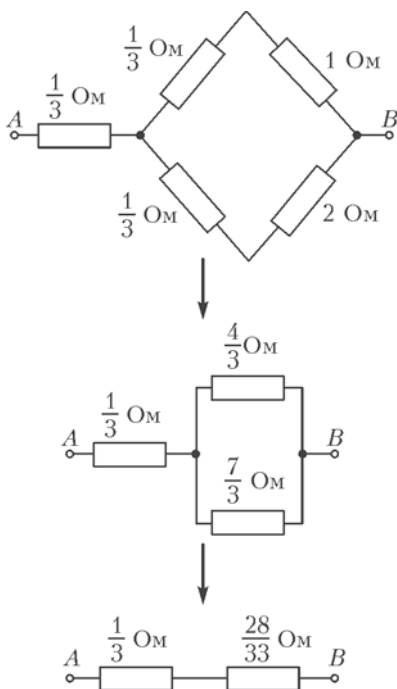


Рис. 4

чим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AB}} = \frac{11}{13} \text{ А}.$$

После разветвления токи в верхней и в нижней ветвях делятся в отношении, обратном сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{7}{4}.$$

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{7}{13} \text{ А}.$$

Немного сложнее было бы найти ток, идущий через участок  $CD$ . Для этого пришлось бы еще найти ток через участок  $AC$ , а затем вычесть из него найденный уже ток через участок  $CB$ .

ясно, что сопротивление между точками  $A$  и  $B$  будет равно

$$R_{AB} = \frac{1}{3} \text{ Ом} + \frac{28}{33} \text{ Ом} = \frac{13}{11} \text{ Ом}.$$

Мы заменяли «треугольник»  $ACD$  «звездой», но можно было решать задачу иначе — заменяя «звезду»  $ADB$  «треугольником» (проделайте это самостоятельно).

Пусть теперь к точкам  $A$  и  $B$  подключена батарея с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и ЭДС  $\mathcal{E} = 1 \text{ В}$ . Нужно найти ток через участок  $CB$ . Понятно, что преобразовать схему надо так, чтобы не затронуть интересующее нас сопротивление  $CB$ . Подойдет то преобразование, которое мы делали раньше (см. рис.4). Используя, что  $R_{AB} = \frac{13}{11} \text{ Ом}$ , полу-

Можно еще немного усложнить задачу – учесть внутреннее сопротивление батареи  $r$ . Тогда полный ток будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{AB}},$$

а остальные токи находятся так же, как и раньше.

Рассмотрим более интересную задачу: найдем, при каком соотношении между величинами  $r$  и  $R$  сопротивление между точками  $A$  и  $B$  в схеме, показанной на рисунке 5, максимально в крайнем положении движка потенциометра.

Сначала преобразуем схему, заменив «треугольник»

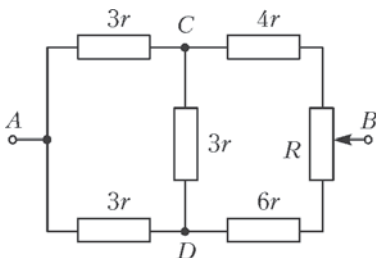


Рис. 5

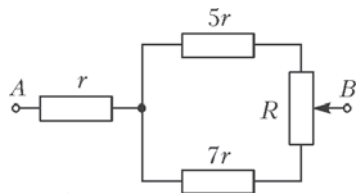


Рис. 6

$ACD$  «звездой» (рис.6). Очевидно, что сопротивление  $r$  не влияет на соотношение сопротивлений в остальной цепи. Займемся поэтому оставшейся частью схемы. Тут включены параллельно два сопротивления:  $5r + R_1$  и  $7r + R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – сопротивления верхней и нижней частей потенциометра соответственно. При этом сумма сопротивлений  $5r + R_1$  и  $7r + R_2$  остается постоянной. Посмотрим, какими они должны быть, чтобы полное сопротивление было максимальным. Обозначим

$$5r + R_1 = r_1 \text{ и } 7r + R_2 = r_2.$$

Тогда общее сопротивление включенных параллельно частей схемы равно

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Если учесть, что

$$r_1 + r_2 = \text{const} = c,$$

то

$$r_0 = \frac{r_1 (c - r_1)}{c}.$$

Это выражение максимально, когда максимален числитель. Но  $y = cr_1 - r_1^2$  – это уравнение параболы, ветви которой пересекают

ось абсцисс в точках 0 и  $c$ . Поэтому числитель дроби наибольший при  $r_1 = c/2$ . Так как  $r_1 + r_2 = c$ , то это означает, что сопротивление между точками  $A$  и  $B$  максимально, если  $r_1 = r_2$ , т.е.


$$5r + R_1 = 7r + R_2, \text{ или } R_1 - R_2 = 2r.$$

Ясно, что это возможно лишь в том случае, если сопротивление всего потенциометра  $R = R_1 + R_2$  не меньше чем  $2r$ . В противном же случае максимум сопротивления между точками  $A$  и  $B$  достигается, когда движок потенциометра находится в крайнем положении.

Итак, ответ:  $R \leq 2r$ .

Метод, о котором мы рассказали, очень удобен для последовательного преобразования сложной схемы к простому виду. Он позволяет рассчитать практически любую сложную цепь, состоящую из сопротивлений. Однако его можно применять и к цепям, содержащим не только сопротивления. Обратим внимание на то, что мы вообще не говорили нигде о физических процессах в цепи, а пользовались только формальным выражением для закона Ома:  $U = Ir$ . Из него следует, что при последовательном соединении сопротивлений их величины складываются, а при параллельном — складываются величины, обратные сопротивлениям. Понятно, что если какие-нибудь другие физические величины связаны законом, аналогичным закону Ома, то все наши выводы справедливы и для них.

В качестве примера рассмотрим цепь с конденсатором (рис.7). Мы знаем, что заряд конденсатора  $Q$  связан с его емкостью  $C$  и напряжением на нем  $U$  соотношением



$Q = CU, \text{ или } U = \frac{1}{C}Q.$

Рис. 7

Сравним последнее выражение с законом Ома  $U = rI$ . Видно, что законы похожи, только вместо тока стоит заряд, а вместо сопротивления — величина, обратная емкости. Это означает, что, для того чтобы найти, скажем, заряды на конденсаторах, можно поступить так: вместо цепи, содержащей конденсаторы, нарисовать цепь, содержащую сопротивления, причем конденсатор емкостью  $C$  ( $\Phi$ ) заменить сопротивлением  $r = \frac{1}{C}$  (Ом). После того как мы рассчитаем токи в цепи из сопротивлений, можно сразу записать, каковы заряды на конденсаторах: если по сопротивлению течет ток  $I = x$  (А), то на соответствующем конденсаторе будет заряд  $Q = x$  (Кл). ЭДС батарей при таком преобразовании цепи остаются без изменения. Но, разумеется, в цепи с конденсаторами внутренние сопротив-



ления батарей не влияют на результат. Поэтому, преобразуя цепь, нам придется лишить батареи их внутренних сопротивлений.

Пусть, например, нужно найти заряд на конденсаторе емкостью  $10 \text{ мкФ}$  в схеме, изображенной на рисунке 8. Конденсатору емкостью  $C = 2 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$  соответствует сопротивление  $r = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом} = 500 \text{ кОм}$ . Далее расчет проводится уже достаточно просто (проделайте это самостоятельно).

Таким образом, метод преобразования цепей, как мы видим, пригоден и для схем из конденсаторов.

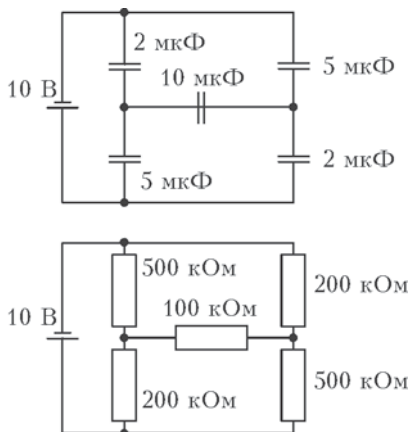


Рис. 8

## ГОРКИ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ И КУЛОН

*Е.Ромишевский*

Предметом нашего рассмотрения будут электрические цепи постоянного тока, включающие проводники и источники тока. Но начнем мы с конденсатора.

Если подключить к заряженным пластинам конденсатора вольтметр, то цепь, составленная из конденсатора и вольтметра, образует замкнутый контур. А значит, работа по переносу электрического заряда по этому контуру в кулоновском электрическом поле будет равна нулю. Предположим, что вольтметр – идеальный, например электростатический, у которого омическое сопротивление бесконечно большое, а емкость бесконечно малая. Двигаясь от положительной пластины 1 к отрицательной пластине 2 (по часовой стрелке – см. рис.1), мы зафиксируем падение (понижение) потенциала на величину  $U_0 = Q_0/C$ ,

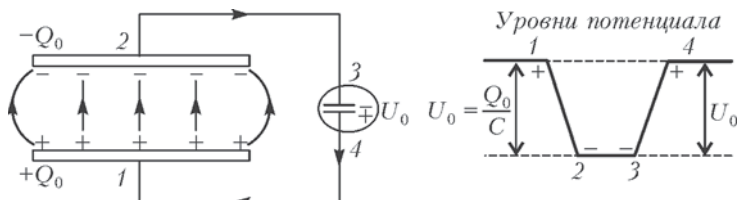


Рис. 1

где  $Q_0$  – заряд,  $C$  – емкость конденсатора. В соединительных проводниках уровень потенциала остается неизменным, а на измерительном элементе вольтметра потенциал поднимается на величину  $U_0$ . Вот это значение  $U_0$  и будет регистрировать идеальный вольтметр – например, по силе притяжения его пластин 3 и 4.

Теперь подключим к пластинам 1 и 2 незаряженного конденсатора источник тока – батарею с электродвижущей силой  $\mathcal{E}_0$ . Конденсатор зарядится до разности потенциалов  $U_0 = \mathcal{E}_0 = Q_0/C$ . Рассмотрим замкнутый контур 1-2-3-4-1 и обойдем его по часовой стрелке (рис.2). Когда мы переходим от положительной

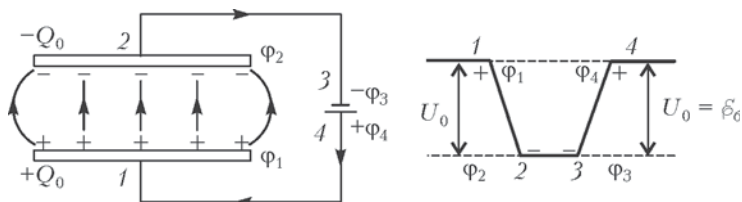


Рис. 2

пластины 1 с потенциалом  $\phi_1$  к отрицательной пластине 2 с потенциалом  $\phi_2$ , потенциал уменьшается; следовательно, разность потенциалов  $\phi_2 - \phi_1 = -U_0 = -Q_0/C$  отрицательна. Когда мы переходим от отрицательной пластины батареи с потенциалом  $\phi_3$  к положительной с потенциалом  $\phi_4$ , эта же разность потенциалов в кулоновском поле батареи положительна:  $\phi_4 - \phi_3 = U_0$ , и мы выходим на тот же уровень потенциала на пластине 1 конденсатора:

$$\phi_2 - \phi_1 + \phi_4 - \phi_3 = -U_0 + U_0 = 0.$$

Возникает вопрос (вот так всегда бывает с физикой – сплошные вопросы): что же такое эта батарея и какова ее «физическая роль»? Как мы уже говорили, внутри батареи имеется кулоновское поле с разностью потенциалов  $U_0 = \mathcal{E}_6$ ; значит, там происходит разделение положительных и отрицательных зарядов. Когда мы подключили батарею к незаряженному конденсатору, через нее прошел электрический заряд  $Q_0$  (внутри батареи – против кулоновского поля) и потенциал поднялся на более высокий уровень. Какие же силы перемещают заряды против действия кулоновского поля?

Воспользуемся тем, что электрическое кулоновское поле схоже по своим свойствам с ньютоновским полем тяготения. Допустим, что мы (заряды) подошли на первом этаже к лифту (отрицательной пластине батареи). На кабину лифта действует сила тяготения (сила со стороны кулоновского поля действует на перемещающиеся заряды). Если лифт поднимается равномерно, на него вверх действуют упругие силы натяжения канатов, равные по величине силе тяжести (силе со стороны кулоновского поля). А какой аналог имеют упругие силы канатов лифта, совершающие работу против сил тяжести? Это – силы химической активности, возникающие между металлом пластин батареи и электролитом, ее заполняющим. Эти силы называют сторонними, подчеркивая тем самым их неэлектростатическую природу. Можно ввести напряженность таких сил:  $\vec{E}_{\text{ст}}$  – это сторонние силы, действующие на единицу положительного заряда. По-

скольку при прохождении зарядов через батарею сторонние силы равны по величине, но противоположны по направлению кулоновским силам, для разности потенциалов можно записать

$$E_{\kappa} l_6 = U_6 = -E_{\text{ст}} l_6 = -\mathcal{E}_6,$$

где  $l_6$  – расстояние, на котором действуют обе эти силы внутри источника. Значит,  $\mathcal{E}_6$  – это работа, которую совершают силы химической активности, перемещая единицу положительного заряда с отрицательной пластины батареи на положительную против сил кулоновского поля с разностью потенциалов, по

величине равной электродвижущей силе батареи, т.е.  $\mathcal{E}_6 = U_0$ .

Рассмотрим распределение полей и потенциалов внутри конкретной батареи – так называемом элементе Вольта (рис.3). В непроводящую банку, содержащую водный раствор серной кислоты, вставлены две пластины: цинковая и медная. В результате химического взаимодействия цинка с электролитом по-

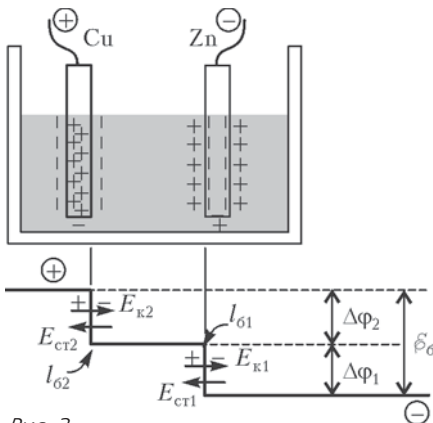


Рис. 3

ложительные ионы цинка уходят в раствор, так что поверхность металла заряжается отрицательным зарядом, а прилегающий слой электролита – положительным. Расстояние между этими слоями  $l_6$  очень мало (порядка атомных размеров), а разность потенциалов  $\Delta\phi$  – порядка одного вольта; следовательно, напряженности кулоновского электрического поля между слоями имеют величины, сравнимые с внутриатомными, и поверхностные плотности этих зарядов очень большие. Точно такие же величины имеют и напряженности сторонних сил в этих слоях, поскольку  $E_{\kappa} = -E_{\text{ст}}$ . Итак, при переходе единицы положительного заряда с отрицательной пластины в электролит сторонние силы «поднимают» потенциал на более высокий уровень:  $\Delta\phi_1 = E_{\kappa_1} l_{6_1}$ . В объеме электролита (тока пока нет) уровень потенциала не меняется. Вторая пластина выбрана медной потому, что в результате химического взаимодействия с тем же электролитом ее поверхность заряжается положительным зарядом, а прилегающий слой электролита – отрицательным. Скачок

потенциала здесь  $\Delta\varphi_2 = E_{k_2} l_{6_2}$  – величина того же порядка, что и  $\Delta\varphi_1$ , а их сумма и есть электродвижущая сила этой батареи:

$$|\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2| = \mathcal{E}_6.$$

Подключим теперь к клеммам батареи длинный и тонкий однородный цилиндрический металлический проводник, имеющий омическое сопротивление  $R = \rho L/S$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление,  $L$  – длина и  $S$  – площадь поперечного сечения проводника (рис. 4). По этому проводнику потечет постоянный ток  $I = \mathcal{E}_6/R$  (если батарея не обладает внутренним сопротивлением). Опять возникает вопрос: какую роль при этом играет электрическое кулоновское поле и какова его картина внутри и вне проводника?

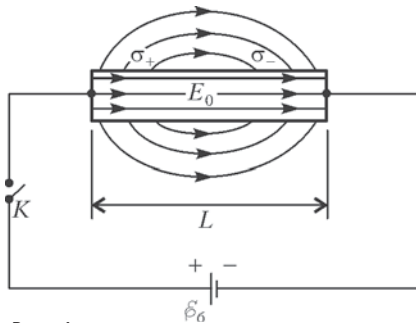


Рис. 4

После замыкания ключа по цепи распространяется электромагнитный импульс, который приводит к такому распределению свободных зарядов по поверхности проводника, что внутри него создается однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$ , а вне его – неоднородное поле, силовые линии которого выходят из поверхности проводника и входят обратно под некоторыми углами (см. рис. 4). Оказывается, что для однородного длинного и тонкого проводника распределение поверхностной плотности заряда  $\sigma$  вдоль оси проводника (кроме его концов) соответствует линейному закону.

Заметим, что свободные электроны при включении источника тока начинают двигаться практически одновременно во всех участках проводника (подобно тому, как вода начинает двигаться во всех участках водопроводной трубы, когда мы открываем кран). При этом в любой части объема проводника количества положительных и отрицательных зарядов строго одинаковы.

Известно, что при прохождении электрического тока в проводнике выделяется тепло. Каков же механизм перехода химической энергии батареи в тепловую энергию проводника?

В отсутствие источника тока движение свободных электронов в проводнике носит беспорядочный характер. Если же в цепь включен источник тока, на электроны внутри проводника действуют кулоновские силы со стороны электрического поля,

которые вызывают упорядоченное, направленное движение электронов. Одновременно со стороны кристаллической решетки действуют силы, тормозящие электроны. Они подобны силам сопротивления движению шарика в вязкой среде (силам жидкого трения). В результате в проводнике устанавливается равномерное движение свободных электронов вдоль силовых линий электрического поля, происходящее с очень маленькой скоростью (по сравнению со скоростью хаотичного теплового движения).

Можно провести аналогию и сказать, что выделение тепла при движении электронов в проводящей среде соответствует выделению тепла при наличии сил жидкого трения, когда за счет сил тяжести (кулоновских сил) тело равномерно соскальзывает с наклонной плоскости. Направление электрического тока соответствует направлению понижения электрического потенциала, т.е. направлению вдоль силовых линий электрического поля. Можно показать (но это несколько выходит за рамки данной статьи), что разность потенциалов на концах проводника равна произведению тока в проводнике на его сопротивление:  $U = IR$ .

Рассмотрим теперь цепь, состоящую из последовательно соединенных двух батарей с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и внутренними сопротивлениями  $r_1$ ,  $r_2$  и двух резисторов с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  (рис.5). Пусть  $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ , тогда ток  $I$  в цепи будет течь против

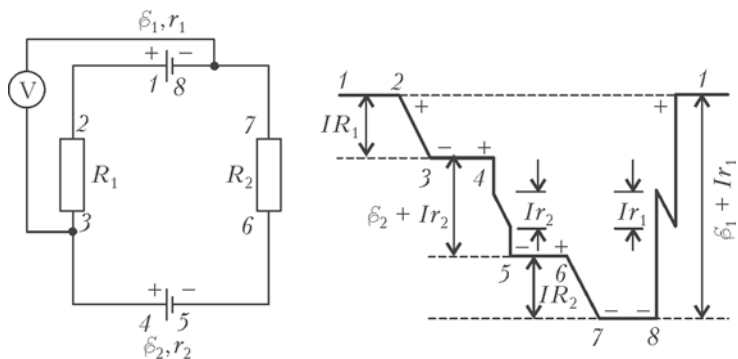


Рис. 5

движения часовой стрелки. Изобразим изменение потенциала электрического кулоновского поля при обходе по замкнутому контуру. Точка 1 имеет наивысший потенциал, а точка 8 – наинизший. Проводник 1 – 2 не имеет сопротивления (нет силы трения), поэтому уровень потенциала здесь не изменяется. Проводник 2–3 с сопротивлением  $R_1$  будем считать похожим на

наш цилиндрический проводник. На этом участке мы спускаемся «под горку», уровень потенциала линейно понижается от точки 2 до точки 3. При этом сила трения равна «скатывающей» силе – силе со стороны кулоновского поля – и вольтметр покажет  $U_1 = IR_1$ . При движении от точки 3 до точки 4 уровень потенциала не меняется. Точка 4 соответствует нахождению на положительной пластине второй батареи с ЭДС  $\mathcal{E}_2$ . Когда мы переходим от положительной пластины к электролиту, мы как бы опускаемся в лифте, уровень потенциала понижается, электрическое поле совершает работу против сторонних сил батареи. То же происходит при переходе от электролита к отрицательной пластине. В результате батарея заряжается с мощностью зарядки  $-\mathcal{E}_2 I$ . Движение зарядов внутри батареи связано с преодолением сопротивления  $r_2$ , и уровень потенциала понижается еще на величину  $Ir_2$ . Вольтметр, подсоединенный к пластинам этой батареи, покажет  $U_{45} = \mathcal{E}_2 + Ir_2$ . На участке 5–6 уровень потенциала не изменяется, а на резисторе с сопротивлением  $R_2$  потенциал упадет на  $IR_2$ . И вот мы оказались на отрицательной пластине более сильной батареи с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  в точке 8. Первый мощный подъем, затем падение на сопротивлении  $r_1$  и снова мощный подъем от электролита к положительной пластине 1.

Обойдя замкнутый контур, мы вернулись на начальный уровень кулоновского потенциала. При этом сумма «подъемов» равна сумме «падений» кулоновского потенциала, т.е. работа по замкнутому контуру в кулоновском поле всегда равна нулю:

$$-IR_1 - \mathcal{E}_2 - Ir_2 - IR_2 - Ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

или

$$I(R_1 + R_2 + r_1 + r_2) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2.$$

Это соотношение называют законом Ома для замкнутой цепи или вторым правилом Кирхгофа. Теперь мы понимаем, что вообще-то оно непосредственно вытекает из свойств электрического кулоновского поля.

## ЭФФЕКТИВНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ В СЕТИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В.Ланге

Перспективность использования электрической энергии в технике и быту стала очевидной еще в начале XIX века, а в конце его началась настоящая война между сторонниками постоянного и переменного тока. В ней, однако, не было ни победителей, ни побежденных, так как для одних целей оказывается необходимым постоянный ток (например, при электролизе), в других случаях целесообразнее использовать переменный (в особенности, при передаче электроэнергии на большие расстояния). Уместно напомнить, что сейчас существуют простые установки, позволяющие легко преобразовывать один вид тока в другой.

В соответствии с названием, в сетях *постоянного* тока напря-

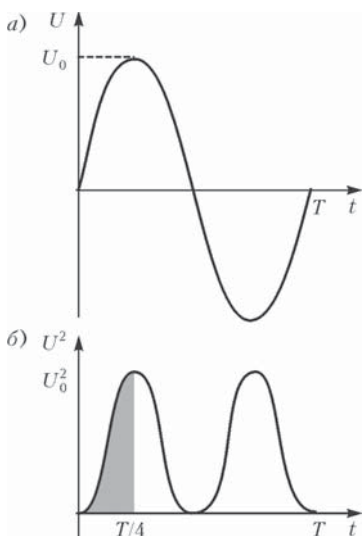


Рис. 1

жение остается неизменным, а в сетях *переменного* тока оно со временем меняется. Обычно изменение напряжения происходит по синусоидальному закону  $U = U_0 \sin \omega t$ , где  $\omega$  — циклическая частота, связанная с периодом  $T$  соотношением  $\omega = 2\pi/T$ , а  $U_0$  — амплитудное значение напряжения. Графически характер изменения напряжения со временем показан на рисунке 1, а.

Предположим, что необходимо рассчитать мощность  $P$ , которую будет потреблять из сети переменного тока с амплитудным напряжением  $U_0$  электрическая печь, имеющая сопротивление  $R$ . Как известно,



такие расчеты выполняются с помощью закона Джоуля–Ленца:

$$P = I^2 R ,$$

или в нашем случае

$$P = \frac{U^2}{R} .$$

Однако в рассматриваемой цепи напряжение меняется и по знаку, и по величине. Как учесть эти два обстоятельства?

Начнем с ответа на более простой первый вопрос. В законе Джоуля–Ленца фигурирует квадрат напряжения, а поскольку  $(+U)^2 = (-U)^2$ , тепловыделение не зависит от знака разности потенциалов (или, что то же, от направления тока). Стало быть, и в сети переменного тока электрическая печь будет исправно выполнять свое назначение.

Попробуем теперь ответить на вопрос, какое напряжение надо подставить в формулу закона Джоуля–Ленца, чтобы получить правильное значение мощности в случае переменного тока. Для этого рассчитаем количество теплоты, выделяемое переменным током за время, равное периоду. И сделаем это следующим образом.

Поскольку теплоотдача определяется квадратом напряжения, легко понять, что тепловыделение имеет период  $T/2$  (рис. 1, б). Более того, достаточно рассмотреть интервал от 0 до  $T/4$ , так как выделенная на рисунке фигура, если учесть ее зеркальные отражения, повторяется именно с таким периодом. На этом интервале фаза колебаний меняется от  $\varphi_1 = 0$  до  $\varphi_2 = \pi/2$ . Запишем выражение для мощности электропечи в некоторый момент времени  $t$ :

$$P(t) = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t .$$

Ее среднее значение  $\langle P \rangle$  в интервале времени от 0 до  $T/4$  представим в виде

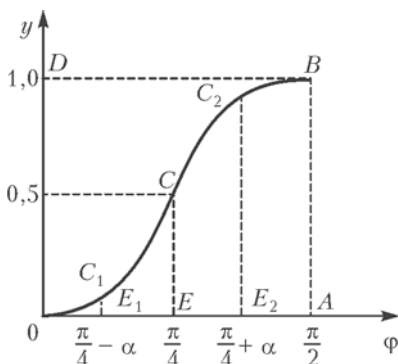
$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{U_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle .$$

В угловых скобках остался зависящий от времени множитель, обозначаемый далее буквой  $y$ . Для расчета его среднего значения воспользуемся рисунком 2, отметив на оси абсцисс точки  $E_1$ ,  $E$  и  $E_2$ , соответствующие фазам  $\pi/4 - \alpha$ ,  $\pi/4$  и  $\pi/4 + \alpha$ , где  $\alpha$  – произвольный угол, удовлетворяющий условию  $0 < \alpha < \pi/4$ .

Ясно, что

$$\begin{aligned} E_1 C_1 &= \sin^2 (\pi/4 - \alpha) = \cos^2 (\pi/2 - (\pi/4 - \alpha)) = \\ &= \cos^2 (\pi/4 + \alpha) = 1 - \sin^2 (\pi/4 + \alpha) = 1 - C_2 E_2 . \end{aligned}$$

Таким образом, кривая  $0C_1CC_2B$  делит прямоугольник  $0DBA$  на две равные части, каждая площадью



$$\frac{A0 \cdot 0D}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{4} .$$

Чтобы найти среднее значение  $\sin^2 \omega t$  за время изменения фазы от 0 до  $\pi/2$ , нужно площадь криволинейной фигуры  $0CBA$  разделить на ее основание:

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{\pi/4}{\pi/2} = \frac{1}{2} .$$

Рис. 2

После этого находим среднее значение мощности за время от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = T/4$ :

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{U_0^2}{2R} .$$

Поскольку такой же результат можно получить для каждого из последующих интервалов длительностью  $T/4$ , правая часть формулы дает мощность плитки сопротивлением  $R$ , включенной в сеть переменного тока с амплитудным значением напряжения  $U_0$ .

Пусть эта же плитка включена в сеть постоянного тока с таким напряжением  $U_{\text{эф}}$ , что ее мощность осталась прежней. Тогда, приравнявая мощность плитки в сети постоянного тока правой части предыдущего выражения, после несложного преобразования получим

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} .$$

Напряжение в сети постоянного тока, где плитка дает такой же тепловой эффект, как и в сети переменного тока с амплитудным значением напряжения, в  $\sqrt{2}$  большим, называется эффективным (или действующим) напряжением в сети переменного тока.

## ЭТА ЗАГАДОЧНАЯ МАГНИТНАЯ СИЛА

Е.Ромишевский

Опытным путем установлено, что сила, действующая на точечный электрический заряд  $q$ , помещенный в электрическое и магнитное поля, зависит в общем случае от положения этого заряда и от его скорости движения. Обычно эту силу разделяют на две составляющие – электрическую  $\vec{F}_э = q\vec{E}$ , которая не зависит от движения заряда, а определяется его положением в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$ , и магнитную  $\vec{F}_м$ , зависящую от скорости заряда  $\vec{v}$ . Именно о магнитной силе и пойдет речь в дальнейшем.

В любой точке пространства магнитная сила перпендикулярна вектору скорости заряда. Перпендикулярна она также и определенному выбранному в пространстве направлению. Величина же магнитной силы (ее модуль) пропорциональна той составляющей скорости заряда, которая перпендикулярна этому выделенному направлению. Эти свойства магнитной силы можно описать, пользуясь понятием магнитного поля. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ , который и определяет выбранное направление в пространстве.

Для определения магнитной силы можно записать следующее выражение:

$$\vec{F}_м = qvB \sin \alpha \cdot \vec{\zeta},$$

где  $v$  и  $B$  – модули векторов скорости заряда и индукции магнитного поля,  $\alpha$  – угол между этими векторами, а единичный вектор  $\vec{\zeta}$  – правый винт (или буравчик) – указывает только направление магнитной силы. Это направление соответствует направлению движения правого винта, головка которого лежит в плоскости векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  и который мы закручиваем, поворачивая его на наименьший угол от вектора  $\vec{v}$  к вектору  $\vec{B}$  (рис.1). Магнитная сила  $\vec{F}_м$  перпендикулярна и вектору  $\vec{v}$ , и вектору  $\vec{B}$ .

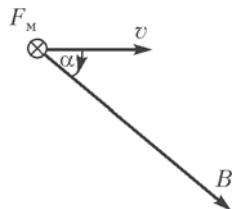


Рис. 1

Полную электромагнитную силу  $\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_м$ , действующую на электрический заряд  $q$ , называют силой Лоренца (заметим, что иногда силой Лоренца называют лишь магнитную силу). По действию силы Лоренца на электрический заряд известного знака можно, в принципе, определить модули и направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Следует особо отметить, что на покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. Важной особенностью магнитной силы является также то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому работы над зарядом не совершает. Это означает, что в постоянном магнитном поле кинетическая энергия заряженной частицы всегда остается неизменной, как бы частица ни двигалась.

Рассмотрим, например, как будут двигаться две разноименно заряженные частицы с зарядами  $+q$  и  $-q$ , имеющие разные массы  $M_1 = 2m$  и  $M_2 = m$ , если в начальный момент скорости этих частиц равны  $\vec{v}_0$  и направлены перпендикулярно границе области существования однородного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$  (рис.2; вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости листа и направлен от нас). На оказавшуюся в области однородного магнитного поля положительную частицу действует магнитная сила, равная  $F_m = qv_0B$  и направленная вначале вверх. На отрицательную частицу действует такая же по величине сила, но направленная вначале вниз. Каждая из частиц опишет полуокружность, после чего покинет область магнитного поля. Радиус окружности можно найти из

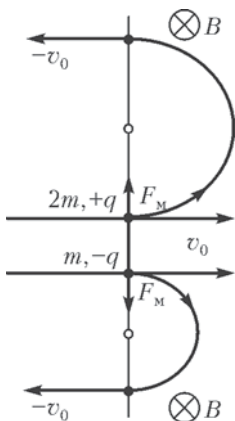


Рис. 2

второго закона Ньютона:

$$qv_0B = \frac{Mv_0^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{Mv_0}{qB}.$$

Угловая скорость движения частицы по окружности и период ее полного обращения будут равны

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{M} \quad \text{и} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi M}{qB}.$$

Видно, что положительная частица ( $M_1 = 2m$ ) опишет полуокружность в два раза большего радиуса, чем отрицательная ( $M_2 = m$ ), которая будет двигаться в противоположную сторону. Возвратится же обратно тяжелая частица (зеркально отразившись) через промежуток времени, в два раза больший, чем отрицательная. Таким образом, однородное магнитное поле как бы разделяет в пространстве и во времени влетевшие вместе, но разные по заряду и по массе частицы.

Если магнитное поле воздействует только на движущиеся заряды, то, как показывает опыт, движущиеся заряды (электрические токи), в свою очередь, всегда возбуждают в пространстве магнитное поле. В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий индукцию  $\vec{B}$  магнитного поля точечного заряда  $q$ , движущегося с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , много меньшей по величине скорости света  $c$ . Этот закон можно записать в виде

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qv \sin \alpha}{r^2} \vec{\zeta},$$

где  $\alpha$  – угол между вектором скорости заряда  $\vec{v}$  и радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным от заряда в точку наблюдения,  $\vec{\zeta}$  – единичный «вектор буравчика», получаемый вращением вектора  $\vec{v}$  к вектору  $\vec{r}$  (рис.3) и отвечающий за направление вектора  $\vec{B}$ . Константу  $1/(\epsilon_0 c^2)$  обычно обозначают  $\mu_0$  и называют магнитной постоянной.

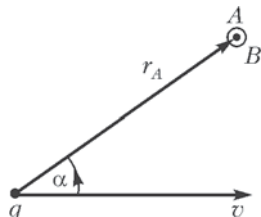


Рис. 3

Заметим, что если умножить обе части приведенной формулы на число электронов  $\Delta N = n\Delta l S$ , находящихся в элементе провода длиной  $\Delta l$ , по которому течет ток  $I = qnvS$ , то получим известный закон Био–Савара для индукции  $\Delta\vec{B}$  магнитного поля, созданного элементом тока  $I\vec{\Delta l}$ :

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l \sin \alpha}{r^2} \vec{\zeta}.$$

Линии магнитной индукции в данном случае представляют собой концентрические окружности, окружающие линию движения заряда (рис.4), а величина магнитной индукции убывает с расстоянием пропорционально

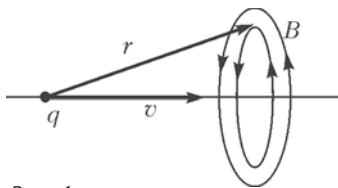


Рис. 4

$1/r^2$ , как и величина напряженности электрического поля точечного заряда. Но магнитное поле не имеет источников и стоков, магнитные линии всегда замкнуты. Это физическое векторное поле уже иного свойства, его называют соленоидальным или вихревым.

Рассмотрим теперь такой пример.

Пусть две достаточно массивные точечные частицы 1 и 2, заряженные одним и тем же зарядом  $q$ , движутся параллельно друг другу с одинаковыми нерелятивистскими скоростями  $\vec{v}$  (рис.5). На каждую частицу действуют электрическая сила отталкивания, равная  $F_{\text{э}} = qE$ , и магнитная сила притяжения, равная  $F_{\text{м}} = qvB$  (скорость одной частицы перпендикулярна магнитному полю, создаваемому другой частицей). Сравним количественно эти две составляющие общей электромагнитной силы Лоренца, действующей, к примеру, на частицу 2:

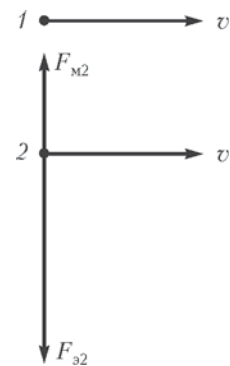


Рис. 5

$$\frac{F_{\text{м2}}}{F_{\text{э2}}} = \frac{vB_{21}}{qE_{21}},$$

где  $B_{21}$  и  $E_{21}$  – индукция магнитного поля и напряженность электрического поля, создаваемых зарядом 1 в месте нахождения заряда 2. Подставив соответствующие значения индукции и напряженности, получим

$$F_{\text{м2}} : F_{\text{э2}} = qv \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} : q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = v^2 : c^2.$$

Это означает, что при нерелятивистских скоростях движения зарядов магнитная сила существенно меньше электрической и является очень малой поправкой к их общей силе электромагнитного взаимодействия – силе Лоренца.

А что если выбрать другую инерциальную систему отсчета, движущуюся равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{v}$  наших заряженных частиц? В этой системе заряды будут покоиться, пропадут их магнитные поля, пропадет и магнитная сила их взаимодействия. Иными словами, поскольку магнитная составляющая силы Лоренца зависит от скорости частицы, она изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Вместе с тем, сама сила Лоренца в нерелятивистском случае, как любая другая сила, не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Это означает, что в системе отсчета, в которой пропадает магнитная составляющая силы, должна изме-

няться и электрическая ее составляющая. Получается, что разделение полной силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие без указания конкретной системы отсчета не имеет смысла.

После рассмотренного нами примера движения двух заряженных частиц может возникнуть естественный вопрос – стоит ли вообще изучать и учитывать такие относительно малые магнитные силы? Оказывается, стоит, и вот почему.

Во-первых, полученное соотношение сил справедливо и при релятивистских скоростях  $v \sim c$ , а тогда магнитные силы оказываются уже сравнимыми с электрическими. Так происходит, например, когда мы имеем дело с пучками быстрых заряженных частиц.

Во-вторых, бывают ситуации, когда ничтожная по величине магнитная сила является единственной действующей силой. Например – при движении электронов вдоль проводов (электрические токи), ибо в этом случае электрические силы отсутствуют в результате почти идеального баланса отрицательных и положительных зарядов в проводниках. Кроме того, участие в создании электрического тока громадного числа носителей зарядов (их примерно  $10^{23}$  в одном кубическом сантиметре проводника) делает магнитную силу весьма значительной.

В-третьих, приходится встречаться с движением заряженных частиц в самых разных по величине внешних электрических и магнитных полях, создаваемых различным образом. В этих случаях соотношения между электрическими и магнитными силами могут быть самыми разнообразными.

## ЕЩЕ РАЗ О МАГНИТНОЙ СИЛЕ

*Е.Ромишевский*

В статье «Эта загадочная магнитная сила» говорилось о свойствах электромагнитной силы Лоренца. Здесь же мы обсудим, как взаимодействуют между собой ее электрическая и магнитная составляющие и какова природа магнитной силы Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле.

Рассмотрим сначала взаимодействие магнитной и электрической сил на примере поступательного движения проводящего бруска в однородном магнитном поле (рис.1). Пусть магнитное

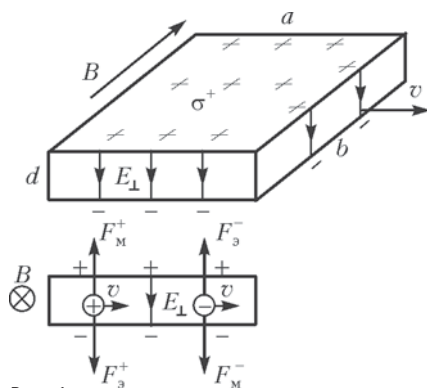


Рис. 1

поле  $\vec{B}$  направлено перпендикулярно вектору постоянной скорости  $\vec{v}$  и плоской грани  $ad$  прямоугольного бруска со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $d$ . Будем считать, что брусок имеет форму «плоского конденсатора»: сторона  $d$  много меньше сторон  $a$  и  $b$ .

Как известно, в узлах жесткой кристаллической решетки металла расположены положительные ионы, а свободные электроны равномерно распределены по его объему. При движении бруска в магнитном поле на положительные заряды бруска  $e^+$  и отрицательные заряды  $e^-$  действуют магнитные силы, равные по величине  $F_M = evB$  и направленные в противоположные сторо-



ны. Под действием магнитной силы свободные электроны смещаются вниз и создают на верхней и нижней поверхностях бруска избыточные заряды с поверхностными плотностями  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ . Это приводит к тому, что внутри бруска, как в плоском конденсаторе, возникает однородное электрическое кулоновское поле  $\vec{E}_\perp$ , вызывающее электрическую силу, которая компенсирует действие магнитной силы в объеме бруска. Магнитная сила как бы вызывает электрическую силу, чтобы себя уравновесить:

$$F_m = F_3, \quad evB = eE_\perp, \quad \text{и} \quad E_\perp = vB.$$

В результате такой «плоский конденсатор» оказывается заряженным до разности потенциалов

$$\Delta\phi = E_\perp d = vBd.$$

В целом брусок остается электрически нейтральным, электрические заряды возникают только на поверхностях бруска и в равных количествах ( $\sigma^+ = \sigma^-$ ).

При равномерном движении бруска в однородном магнитном поле полная сила, действующая на брусок, естественно, равна нулю. Однако при ускорении бруска, т.е. при увеличении скорости  $\vec{v}$ , или при вхождении в область увеличивающегося магнитного поля  $\vec{B}$  брусок будет испытывать со стороны магнитного поля силу торможения. При этом будут, соответственно, увеличиваться и напряженность электрического поля  $\vec{E}_\perp$ , и поверхностные плотности зарядов  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$ .

Заметим, что равномерно движущийся в магнитном поле проводящий брусок представляет собой прообраз главного элемента самых мощных и самых распространенных источников электрической энергии, электродвижущая сила  $\mathcal{E}$  которых определяется именно магнитной силой:  $\mathcal{E} = vBd$ .

Пусть теперь наш металлический брусок  $abd$  неподвижен и имеет омическое сопротивление  $R$ . Подключим к его граням  $bd$  (рис.2) батарею с электродвижущей силой  $\mathcal{E}_6$  так, чтобы бес-

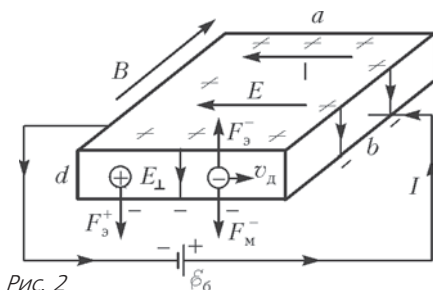


Рис. 2

печить в бруске постоянный по любому сечению  $bd$  электрический ток  $I = \mathcal{E}_6/R$ . Поскольку разность потенциалов между сечениями  $bd$  равна  $\mathcal{E}_6$ , в объеме бруска установится однородное электрическое поле  $\vec{E}$ , параллельное сторонам  $a$ . Под влиянием этого поля свободные электроны металла будут дрейфовать вправо со средней скоростью  $v_d$ , создавая электрический ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_6}{R} = nev_d bd = nev_d S,$$

где  $n$  – плотность свободных электронов,  $e$  – их заряд, а  $S = bd$  – площадь сечения. Нужно отметить, что направление движения электронов со скоростью  $v_d$  противоположно направлению электрического поля  $\vec{E}$  и направлению электрического тока  $I$ . Положительно заряженные ионы, образующие жесткую кристаллическую решетку, естественно, при этом покоятся.

Если внешнее магнитное поле отсутствует, то единственным магнитным полем будет собственное магнитное поле  $\vec{B}_c$ , возникающее при движении свободных электронов, которым мы можем пренебречь. Теперь включим внешнее магнитное поле  $\vec{B}$ , точно такое же, как и в предыдущем случае. Под действием возникшей магнитной силы, равной  $F_m = ev_d B$ , движущиеся со скоростью  $v_d$  электроны будут отклоняться вниз и создавать избыток отрицательных зарядов на нижней поверхности бруска и положительных на его верхней поверхности. Так будет продолжаться до тех пор, пока не возникнет поперечное электрическое поле  $\vec{E}_\perp$ , направленное вниз и компенсирующее действие магнитной силы – точно так же, как это было в случае равномерного движения бруска в однородном магнитном поле. Принципиальное отличие заключается в том, что при наличии электрического тока в движении участвуют только свободные электроны. В стационарном состоянии, которое достигается очень быстро после включения внешнего магнитного поля, электроны в среднем снова движутся горизонтально вдоль сторон  $a$ , а внутри металлического бруска появляется поперечное электрическое поле  $E_\perp = \sigma/\epsilon_0$ , наблюдаемое в системе отсчета, связанной с кристаллической решеткой металла. Это поле своим действием уравнивает магнитную силу, действующую на движущиеся электроны, и создает электрическую силу  $\vec{F}_3^+$ , направленную вниз и действующую на неподвижные положительные ионы (на кристаллическую решетку металла).

Вот таким образом магнитная сила, действующая на электроны, передается сплошному металлическому бруску. Величину этой воспринимаемой бруском силы можно записать так:

на один положительный ион действует сила, равная

$$F_{\perp} = eE_{\perp} = ev_d B ,$$

на все же ионы бруска, а их  $N = nabd$ , где  $n$  – число ионов в единице объема (равное плотности свободных электронов), будет действовать сила, равная

$$F_N = ev_d B \cdot nabd = nev_d \cdot B \cdot a = IBa .$$

Как и следовало ожидать, эта сила в точности равна сумме всех сил Лоренца, действующих со стороны магнитного поля на движущиеся электроны. Силу, действующую на проводник длиной  $a$ , по которому течет ток  $I$  и который помещен в однородное магнитное поле  $\vec{B}$ , называют силой Ампера. А физическое явление возникновения разности потенциалов между поверхностями проводника (нашего бруска), когда по нему течет электрический ток и проводник находится в магнитном поле, называется *эффектом Холла*. Эту разность потенциалов

$$\Delta\varphi = E_{\perp}d = v_d Bd = \frac{1}{neS} IBd$$

можно измерить непосредственно с помощью вольтметра. Заметим, что эффект Холла был открыт в 1879 году, за много лет до открытия Томсоном электрона (1897 г.).

## ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ИЛИ «ПРАВИЛО ПОТОКА»?

М.Лившиц

В физике возможны (хотя и редко) ситуации, когда одна и та же формула допускает различное содержание, т.е. описывает разные по сути физические законы. Рассмотрим один такой случай, связанный со знаменитым законом электромагнитной индукции, открытым Фарадеем.

**«Правило потока» как объединение двух законов.** Физический смысл закона Фарадея заключается в том, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. А именно, при изменении *во времени* магнитного потока ( $\Phi$ ), пронизывающего поверхность, ограниченную замкнутым *неподвижным* проводником, в этом проводнике индуцируется ЭДС ( $\mathcal{E}_i$ ), равная по величине и противоположная по знаку скорости изменения этого потока:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} . \quad (*)$$

Это соотношение называют также «правилом потока».

Однако формулу (\*), называя по-прежнему законом электромагнитной индукции, в ряде учебников, в том числе и школьных, понимают более широко, включая еще одну причину возникновения ЭДС в проводящем контуре. Этой причиной является сила Лоренца, т.е. сила, действующая на движущийся заряд в магнитном поле. Величина этой силы равна

$$F_L = qvB \sin \alpha ,$$

где  $q$  – величина заряда,  $v$  – скорость его движения,  $B$  – модуль вектора магнитной индукции поля, в котором движется заряд,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Направление силы Лоренца определяется известным правилом левой руки.

Рассмотрим простейший случай движения проводника в магнитном поле, показанный на рисунке 1. Под действием силы Лоренца свободные электроны в проводнике (пластинке) перемещаются так, что нижний конец пластинки заряжается отрица-

тельно, а верхний – положительно. Это происходит до тех пор, пока возникающее из-за смещения электронов электрическое поле не начнет действовать на электроны кулоновской силой, равной по величине и противоположной по направлению силе Лоренца. Таким образом действие силы Лоренца на свободные заряды проводника, движущегося в маг-

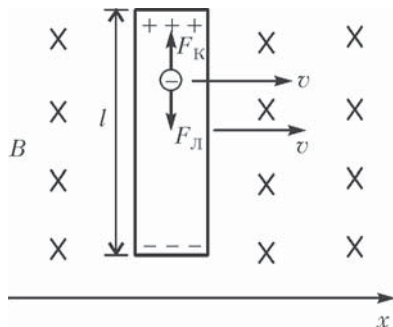


Рис. 1

нитном поле, приводит к возникновению ЭДС индукции. Хотя эта ЭДС не имеет никакого отношения к закону электромагнитной индукции Фарадея, оказывается, что ее можно описать точно такой же формулой. Действительно, напряженность наведенного в проводнике электрического поля равна

$$E = -\frac{F_L}{q} = -vB,$$

а ЭДС индукции –

$$\mathcal{E}_i = El = -vBl = -\frac{\Delta x}{\Delta t}Bl = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Но в данном случае под  $\Delta\Phi$  понимается не величина изменения во времени магнитного потока, пронизывающего данный контур (как в законе Фарадея), а величина магнитного потока, *пересекаемого движущимся* проводником за время  $\Delta t$ . Для замкнутого контура, перемещающегося или деформируемого в магнитном поле, под  $\Delta\Phi$  понимается происходящее при этом изменение магнитного потока через этот контур.

Обобщение формулы ЭДС электромагнитной индукции, или «правила потока», на движение проводника в магнитном поле (говорят еще – на явление пересечения проводником линий магнитной индукции) можно использовать при решении широкого круга задач – для сколь угодно сложной конфигурации проводящего контура и для любого характера движения его частей (надо только применить этот расчет к отдельным элементам сложного контура и просуммировать результат). Часто гораздо удобнее вычислять величину ЭДС, индуцируемой при движении проводника в магнитном поле, пользуясь «правилом потока», а не прямым вычислением работы силы Лоренца.

Итак, «правило потока» утверждает, что ЭДС в контуре равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через данный контур независимо от того, меняется ли величина потока из-за изменения магнитного поля во времени при неподвижном контуре, или в результате перемещения или деформации контура, или из-за того и другого вместе.

**Парадоксы, парадоксы...** Так может быть, и не стоит различать причины возникновения ЭДС индукции и считать «правило потока» фундаментальным обобщением закона электромагнитной индукции? Оказывается, стоит, иначе такое отношение к

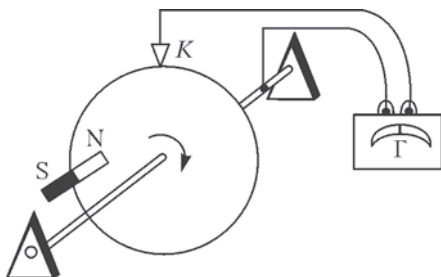


Рис. 2

странстве по диску от контакта  $K$  к его оси, следовательно, магнитный поток через контур остается постоянным. Но физически эта часть контура осуществляется меняющимися в процессе вращения участками диска, поэтому на свободные электроны в диске, обладающие из-за его вращения скоростью, действует

сила Лоренца и возникает ЭДС индукции.

1) *Магнитный поток, пронизывающий контур, остается неизменным:  $\Delta\Phi/\Delta t = 0$ , а ЭДС создается (рис.2).*

Когда медный диск вращается, контур тока, казалось бы, не изменяется, проходя в пространстве по диску от контакта  $K$  к его оси, следовательно, магнитный поток через контур остается постоянным. Но физически эта часть контура осуществляется меняющимися в процессе вращения участками диска, поэтому на свободные электроны в диске, обладающие из-за его вращения скоростью, действует

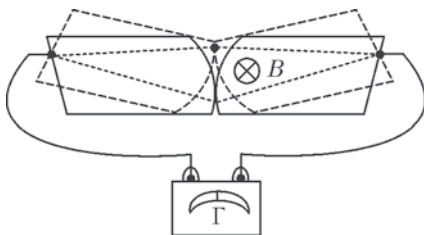


Рис. 3

сила Лоренца и возникает ЭДС индукции.

2) *Изменение магнитного потока сквозь контур не приводит к возникновению ЭДС индукции (рис.3).*

При повороте металлических пластин с несколькими изогнутыми поверхностями соприкосновения, помещенных в однородное магнитное поле, перпендикулярное их плоскости, на некоторый угол магнитный поток через цепь, замыкающуюся в пластинах по точечным линиям, изменяется на большую величину. Однако поворот пластин связан с незначительным их перемещением, при котором произведение  $vB$  в формуле для силы Лорен-

ца близко к нулю, поэтому ЭДС индукции практически отсутствует.

В чем же причина этих парадоксов?

В тех случаях, когда справедлив закон электромагнитной индукции, ЭДС существует вдоль данного геометрического контура независимо от того, материализуется этот контур или нет. В противоположность этому, для существования ЭДС индукции, порождаемой силой Лоренца, совершенно необходимо, чтобы контур был овеществлен, т.е. представлял собой проводник. Именно в этом и состоит принципиальное различие явлений возникновения ЭДС индукции, вызываемых действием двух разных законов, объединенных одной формулой «правила потока». Эта формула и оказывается именно правилом, а не законом. Но «нет правил без исключений». Вот мы и познакомились с исключениями из «правила потока».

А как избежать ошибок при использовании такого удобного правила и не наткнуться как раз на исключение?

Оказывается, имеется надежный ориентир: необходимо проверять, чтобы все время сохранялось точное соответствие между *физическим* контуром, состоящим из проводников, и *геометрическим* контуром, по которому вычисляется наводимая ЭДС. При нарушении такого соответствия необходимо вычисления производить раздельно: по закону Фарадея или непосредственно с помощью силы Лоренца. Иначе, как показывают приведенные выше примеры, возможны ошибки.

**Примечание редакции.** Тот факт, что две физически различные ситуации описываются одним и тем же законом, отнюдь не является случайным. Он находит полное объяснение в теории относительности Эйнштейна. Так, при равномерном приближении проводящего контура к неподвижному магниту возникновение тока в контуре объясняется действием силы Лоренца. Но если перейти в систему отсчета, связанную с контуром, то возникновение тока объясняется действием вихревого электрического поля. Подробнее об этом рассказывается, например, в статье А.Черноуцана «Электромагнитная индукция и принципы относительности», опубликованной в Приложении к журналу «Квант» №5/95.

## ДВА КОЛЬЦА В ОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*А.Стасенко*

– Неужели же колебание – принцип?  
– Первый в жизни. Единственный, который  
тверд.

*Тот, которым цветет все и все – живет.*

В.Розанов.

Литературные и политические афоризмы

Известно, как Архимед при помощи ванны отличил серебряную вещь от золотой. А если отключили воду (или она замерзла в трубах), нет ли другого способа? Вот об этом и пойдет речь.

Жили-были два кольца одинаковой массы  $m$  и одинакового радиуса  $a$ . По виду совсем одинаковые, но одно золотое, а другое серебряное. Один способный джентльмен анодировал их да и позабыл, где какое. Тут и вода не помогла бы. Однако догадался он подвесить их на тонких упругих нитях, да еще в постоянном магнитном поле (рис.1). Что они могли поделать? Ну конечно, только совершать крутильные колебания вокруг осей, совпадающих с нитями. И возникла надежда, что их свободные колеба-

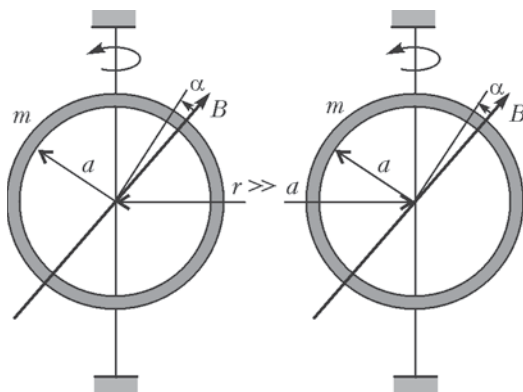


Рис. 1



ния будут затухать с разной скоростью и это легко будет заметить. Но – какое быстрее? И вообще, почему их колебания должны затухать?

Разумеется, если кольца находятся в воздухе, то будет действовать сопротивление воздуха; однако кольца можно поместить в вакуум или «пренебречь сопротивлением воздуха» по старой школьной привычке. Далее, крутильные деформации упругих нитей, конечно, будут сопровождаться выделением в них тепла («внутреннее трение»), т.е. потерями механической энергии колебаний. От этого не избавиться, но этим тоже можно пренебречь по сравнению с... чем? И вот тут на первый план выступают магнитное поле и закон Фарадея.

Как известно, при повороте замкнутого проводника в неподвижном магнитном поле и, следовательно, при изменении магнитного потока через поверхность, опирающуюся на этот проводник (или, как еще говорят, при изменении числа линий индукции магнитного поля, пронизывающих эту поверхность), в проводнике возникнет электродвижущая сила индукции. (То же самое произойдет, если проводник как-то растягивать или сжимать, т.е. менять площадь поверхности, или поворачивать само магнитное поле вокруг проводника – словом, если любым способом менять этот самый поток магнитной индукции.) Но если в проводнике возникла ЭДС  $\mathcal{E}$ , то потечет электрический ток  $i$ , значит, на его сопротивлении  $R$  будет выделяться в единицу времени тепловая энергия  $\mathcal{E}^2/R$ . Будем считать, что это единственный сток энергии («сток» означает «отрицательный источник») – ну хотя бы потому, что заданное поле достаточно сильное.

Конечно, мы знаем, что возникший ток породит свое магнитное поле (самоиндукция), которое будет препятствовать изменению потока первоначального поля (закон Ленца), но для простоты рассуждений будем считать, что коэффициент самоиндукции пренебрежимо мал.

У каждого кольца на нити есть положение равновесия, при котором нить не закручена. Чтобы «включить» колебания, закрутим нить на малый угол  $\alpha_0$  ( $\alpha_0 \ll \pi$ ) и отпустим. Возникнут свободные затухающие колебания. Любая колебательная система характеризуется очень важным параметром – добротностью. Чем больше добротность, тем «лучше» колебания. Например, гармонические колебания (рис.2,а; штриховая кривая), по определению, никогда не затухают – их добротность бесконечно велика. Амплитуда же затухающих колебаний за один период  $T$  уменьшается на некоторую величину  $\Delta\alpha_m$ .

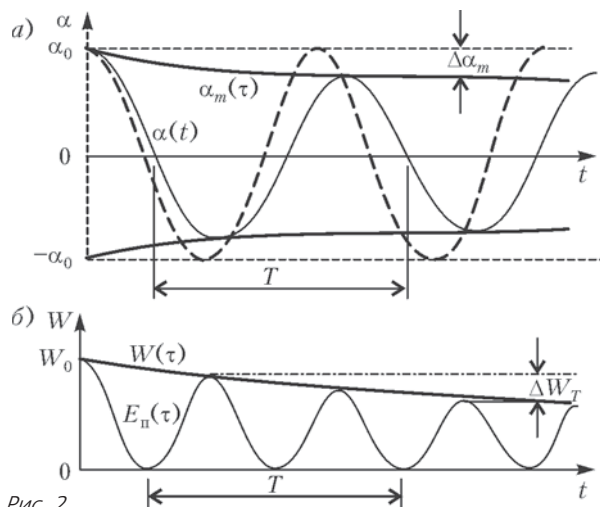


Рис. 2

А что происходит с энергией колебаний? Ведь полная механическая энергия состоит из энергий двух сортов: потенциальной  $E_{\text{п}}$  и кинетической  $E_{\text{к}}$ . Рассмотрим сначала первую из них. Подобно тому как потенциальная энергия растянутой пружины равна  $kx^2/2$  (где  $x$  – растяжение,  $k$  – жесткость), потенциальная энергия закрученной нити равна  $E_{\text{п}} = G\alpha^2/2$ , где  $G$  – крутильная жесткость. Ее ( $E_{\text{п}}$ ) изменение со временем показано на рисунке 2,б. Видно, что потенциальная энергия обращается в ноль, когда колебательная система – осциллятор (в данном случае кольцо на нитях) – проходит положение равновесия. Но в эти же моменты времени достигает наибольшей величины кинетическая энергия  $E_{\text{к}}$ . Можно показать, что для идеальных (гармонических) колебаний средние (за период) значения потенциальной и кинетической энергий строго одинаковы:  $\langle E_{\text{п}} \rangle = \langle E_{\text{к}} \rangle$ , а их сумма  $W = \langle E_{\text{п}} \rangle + \langle E_{\text{к}} \rangle$  не изменяется со временем (а куда же ей деваться, если нет потерь). Но в случае затухающих колебаний эта суммарная механическая энергия уменьшается за период на величину  $\Delta W_T$ . Теперь понятно, что «качество» колебаний, т.е. их добротность  $Q$ , разумно охарактеризовать отношением  $W/\Delta W_T$  – чем меньше знаменатель (потери), тем «лучше» колебания, тем ближе они к прекрасным (но недостижимым) свободным гармоническим колебаниям. Или отношением характерного времени затухания, т.е. времени, за которое происходит уменьшение амплитуды колебаний  $\alpha_m$ , например, в 2, 10 или  $e$  раз, к периоду колебаний.

Оценим это отношение для одного из колец. Пусть изменение угла поворота описывается уравнением

$$\alpha(t) = \alpha_m(\tau) \cos \omega t$$

(см. рис.2,а). Заметим, что в этой записи указаны два времени: 1) «быстрое» время  $t$ , характерным масштабом которого является период  $T$  – за этот отрезок времени происходят большие изменения угла в крайних его пределах, и 2) «медленное» время  $\tau$ , за которое амплитуда  $\alpha_m$  изменяется на заметную величину и которое содержит много периодов колебаний. Значит, мы предполагаем, что колебания хотя и не идеальные, но «достаточно хорошие» – они медленно затухают и, значит, их добротность высока. А их суммарная энергия в любой момент времени равна

$$W = 2 \langle E_n \rangle = 2 \frac{G \langle \alpha^2(t) \rangle}{2} = \frac{G \alpha_m^2(\tau)}{2}$$

(так как  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ ).

Теперь найдем, наконец, изменение потока индукции магнитного поля через плоскость кольца. Сам поток равен

$$\Phi = BS \sin \alpha \approx BS \alpha = B \pi a^2 \alpha_m(\tau) \cos \omega t$$

(напомним, что угол  $\alpha$  предполагается малым, поэтому  $\sin \alpha \approx \alpha$ ). Его изменение на масштабах времени порядка одного периода связано только с изменением косинуса (ведь  $\alpha_m(\tau)$  «почти» постоянно на этом отрезке времени). Следовательно,

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\omega B \pi a^2 \alpha_m(\tau) \sin \omega t.$$

Но это и есть ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ . Значит, потери энергии за период составят

$$\Delta W_T = T \cdot \frac{\langle \mathcal{E}^2 \rangle}{R} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{(\omega B \pi a^2)^2 \alpha_m^2(\tau) \cdot (1/2)}{2\pi a / (\lambda s)}.$$

Здесь учтено, что  $T = 2\pi/\omega$ ,  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$ , а сопротивление проводника длиной  $2\pi a$  и поперечного сечения  $s$  равно  $R = 2\pi a / (\lambda s)$ , где  $\lambda$  – удельная электропроводность материала.

Итак, вот, наконец, желанная добротность колебаний:

$$\frac{W}{\Delta W_T} = \frac{G \alpha_m^2(\tau)}{2} \frac{\omega \cdot 2\pi a}{2\pi (\omega B \pi a^2)^2 \alpha_m^2(\tau) (1/2) \lambda s}.$$

Видно, прежде всего, что это отношение не зависит от «амплитуды» колебаний  $\alpha_m(\tau)$ . Далее, если радиусы, массы и жестко-

сти нитей подвеса одинаковы для обоих колец, то частоты их колебаний одинаковы; кроме того, магнитное поле одно и то же. Значит, добротности  $Q$  будут отличаться только из-за различия удельных электропроводностей и площадей сечения проводников, поэтому можно записать

$$Q \sim \frac{W}{\Delta W_T} \sim \frac{1}{\lambda s}.$$

А поскольку массы и радиусы колец одинаковы, то их площади сечения обратно пропорциональны плотностям:  $s \sim \rho^{-1}$ , и

$$Q \sim \frac{\rho}{\lambda}.$$

И тут Одинспособныйджентльмен понял, что раз уж столько всего одинакового у обоих колец, то, закрыв глаза и подумав, можно было бы и без длительных рассуждений сообразить, что отношение добротностей обоих осцилляторов должно иметь вид

$$\frac{Q_{Ag}}{Q_{Au}} = \frac{\lambda_{Au} \rho_{Ag}}{\lambda_{Ag} \rho_{Au}} = \frac{\tau_{Ag}}{\tau_{Au}}.$$

Заглянув в справочник, он получил

$$\frac{\tau_{Ag}}{\tau_{Au}} = \frac{1,66 \cdot 10,5}{2,42 \cdot 19,3} \approx 0,4.$$

Значит, крутильные колебания серебряного кольца будут затухать заметно быстрее.

— Но, позвольте, — сказал Другойспособныйджентльмен, — ведь если у веществ этих колец различные удельные теплоемкости  $c$ , то при одинаковых массах они могут нагреться по-разному.

Действительно, если отклонить оба кольца от положения равновесия на одинаковый угол  $\alpha_0$ , то в конце концов вся начальная энергия перейдет в тепло, так что отношение приращений температур колец будет равно

$$\frac{\Delta t_{Ag}^{\circ}}{\Delta t_{Au}^{\circ}} = \frac{c_{Au}}{c_{Ag}} = \frac{0,130}{0,235} \approx 0,5.$$

Останется только измерить или даже только почувствовать (хотя бы пальцем) различие температур — и проблема решена.

— Однако, позвольте, — сказал Третийспособныйджентльмен, — ведь если видимые геометрические параметры колец (радиусы, внешние диаметры сечений) одинаковы, то при одинаковых массах, но разных плотностях по крайней мере внутри одного из них должна быть полость; значит, их моменты инерции относи-

тельно оси вращения будут хоть чуть-чуть да отличаться. Следовательно, и собственные частоты их колебаний при одной и той же крутильной жесткости нитей подвеса будут несколько отличаться, что будет рано или поздно замечено по различию фаз колебаний (например, когда одно из колец будет находиться в положении максимального отклонения, т.е. мгновенного покоя, другое будет проходить положение равновесия с максимальной скоростью).

– Позвольте, – начал было Очереднойспособныйджентльмен, но тут его перебил Первый. – А что такое «момент инерции относительно оси вращения»?

И ему посоветовали срочно поступать в Московский государственный университет или в Московский физико-технический институт.

## ОТКУДА ТЕЧЕТ ЭНЕРГИЯ: ОТКРЫТИЕ ЗА ОТКРЫТИЕМ

*Е.Ромишевский, А.Стасенко*

*Где только возможно, знание должно  
быть внедряемо в ум другого тем самым  
путем, каким оно было впервые открыто.*

Фрэнсис Бэкон

Рассмотрим самую что ни на есть простую электрическую цепь – батарейку, электроды которой замкнуты проводом, обладающим некоторым конечным сопротивлением (рис. 1,а). Разумеется, в проводе будет течь постоянный электрический ток и будет постоянно выделяться джоулево тепло. Тут еще (или уже) нет открытий. Чтобы их сделать, надо потрудиться. Поэтому вспомним основные свойства электромагнитного поля.

Самым «простым» полем иногда считается электрическое поле плоского конденсатора (рис.2,а). Поскольку оно пространственно однородно, то, протаскивая любой заряд  $+q$  по замкнутому контуру  $ABCD$ , мы получим нулевую работу. Действительно, на участке  $AB$  работа будет равна  $-qE \cdot AB$  (поле сопротивляется перемещению заряда), на участке  $CD$  поле совершает работу  $+qE \cdot CD = +qE \cdot AB$ , а на участках  $BC$  и  $DA$  работа не совершается вовсе. В этом же можно убедиться и на примере точечного заряда (рис.2,б). И вообще, это свойство любого потенциально-го поля: работа поля по замкнутому контуру, или циркуляция поля, равна нулю. В качестве другого аналогичного примера может служить поле тяготения. Можно показать, что свойство потенциальности поля не зависит ни от формы контура, ни от направления его обхода – ноль он и в Африке ноль.

Однако, не так уж он прост, этот плоский конденсатор (поэтому выше эта его простота взята в кавычки). Ведь если мы захотим пройти по контуру  $ABC'D'A$ , то из потенциальности электростатического поля мы должны будем сделать заключение, что на внешнем участке контура  $C'D'$  тоже должно быть поле, в точности компенсирующее нашу работу на участке  $AB$ . Поэтому, когда говорят о том, что поле плоского конденсатора

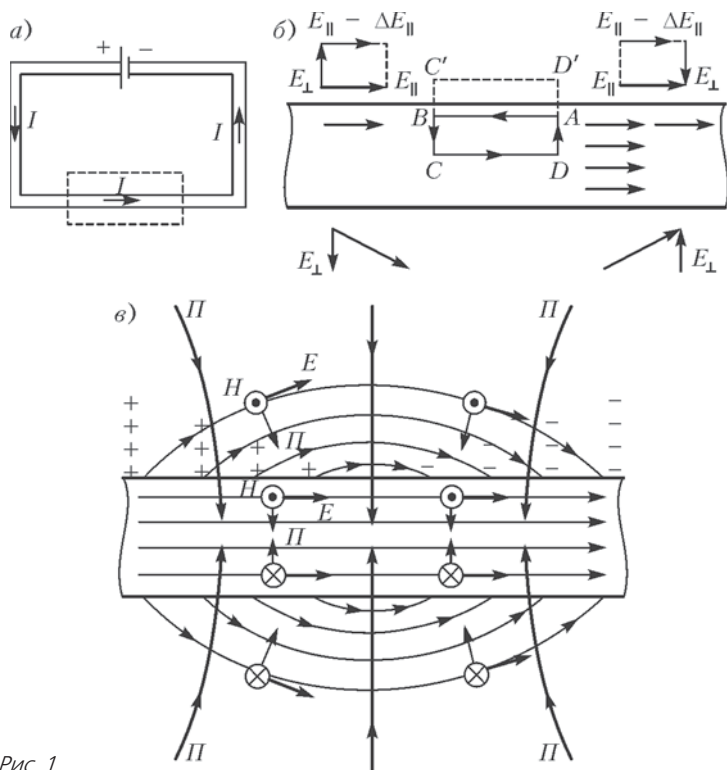


Рис. 1

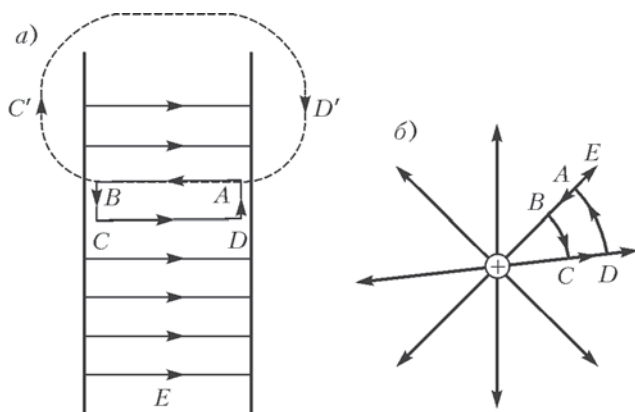


Рис. 2

однородно и локализовано внутри, часто произносят извиняющие слова типа «далеко от концов пластин», «расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров» или даже «возьмем бесконечно большие пластины» (хотя это и очень нелегко).

Но мы можем извлечь из плоского конденсатора еще один полезный факт. Если, действительно, взять участок  $AB$  далеко от краев пластин, то замыкающий внешний участок контура  $C'D'$  будет очень длинным и, значит, среднее значение напряженности поля вдоль него будет малым, а «в пределе», если пластины бесконечно велики, это значение будет стремиться к нулю. Отсюда получим другое важное утверждение: скачок нормальной (перпендикулярной) составляющей электростатического поля при прохождении заряженной плоскости (а это и есть пластина конденсатора) пропорционален поверхностной плотности заряда  $\sigma$  :

$$E_{\text{снаружи}} - E_{\text{внутри}} \sim \sigma.$$

Все это нам немедленно пригодится. Рассмотрим увеличенный отрезок провода (рис.1,б). Поскольку ток течет параллельно оси, электрическое поле внутри провода тоже параллельно оси. Плотность тока  $\vec{j}$  связана с напряженностью поля  $\vec{E}$  в любой точке локальным законом Ома  $\vec{j} = \lambda \vec{E}$ , где  $\lambda$  – удельная электропроводность материала. Если мы пройдемся вдоль контура  $ABCD$  внутри провода, то, опять же из условия равенства циркуляции поля нулю, сделаем вывод о том, что вдоль  $CD$  и  $BA$  поле  $\vec{E}$  должно быть одинаково. Значит, ток тоже равномерно распределен по сечению проводника, т.е.  $\vec{j} = \text{const}$ , так что  $I = j\pi a^2$  (где  $a$  – радиус поперечного сечения провода). Но по той же причине, пройдясь вдоль контура  $ABC'D'A$ , мы заключим, что продольная составляющая электрического поля  $E_{\parallel}$  вдоль отрезка  $C'D'$ , лежащего вне провода, должна быть такой же, как и внутри провода. Получается, что снаружи провода есть электрическое поле. (Чем не открытие?!)

Далее, интуитивно ясно, что с удалением от провода напряженность поля будет уменьшаться. Но ведь его циркуляция по любому контуру должна оставаться нулевой. Как это себе представить? Очень просто: это означает, что вне провода существует и перпендикулярная (радиальная) составляющая  $E_{\perp}$ , направленная либо вверх, либо вниз, но в любом случае «помогающая» более слабому полю  $E_{\parallel} - \Delta E_{\parallel}$  (более удаленному от провода) компенсировать вклад в циркуляцию более сильного поля  $E_{\parallel}$ . Таким образом, получается, что вне провода линии



электрического поля  $\vec{E}$ , вообще говоря, наклонены к его оси. В результате получится картина, представленная на рисунке 1,в.

Но что это? Внутри провода поле  $\vec{E}$  строго параллельно оси, следовательно, не имеет радиальной составляющей, а снаружи есть составляющая, перпендикулярная поверхности провода. Значит, существует скачок нормальной составляющей электрического поля при переходе через поверхность провода. А это означает, что существуют поверхностные заряды. В целом провод, конечно, нейтрален: ведь батарейка не может создать электрический заряд, а может только перераспределить его.

Но что это мы все об электрическом поле? А магнитное? Ведь если течет ток, то вокруг него образуется кольцевое магнитное поле. Как вы знаете, силовой характеристикой магнитного поля является его индукция  $\vec{B}$ . Но, по аналогии с электрическим полем, наряду с индукцией говорят и о напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Для вакуума связь между этими характеристиками предельно проста:  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , где  $\mu_0$  – магнитная постоянная. Напряженность магнитного поля удовлетворяет своему закону: циркуляция по замкнутому контуру равна току, охватываемому этим контуром (рис.3,а):

$$H \cdot 2\pi r = I.$$

Отсюда видна, во-первых, размерность магнитной напряженности:  $[H] = \text{А/м}$ . Во-вторых, видно, что значение напряженности (а значит, и индукции) вне провода убывает с расстоянием от провода:

$$H \sim \frac{1}{r} \text{ при } r > a.$$

В-третьих, если мы возьмем контур внутри провода ( $r < a$ ), то должны записать

$$H \cdot 2\pi r = j \cdot \pi r^2$$

(справа как раз и стоит ток, протекающий через площадку  $\pi r^2$ , – вспомним, что  $j = \text{const}$ ). Отсюда

$$H \sim r \text{ при } r < a.$$

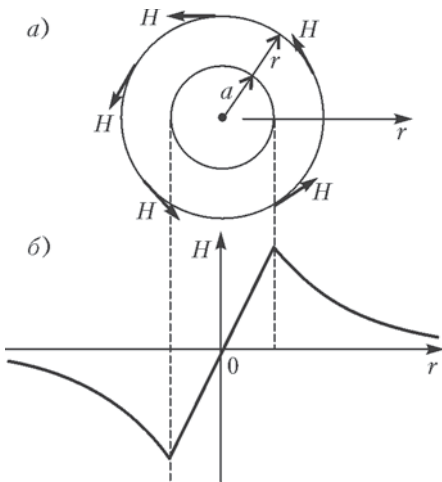


Рис. 3

В результате получим радиальное распределение окружной составляющей магнитного поля, изображенное на рисунке 3,б.

Важно, что в любой точке пространства (внутри и вне провода) поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны.

Итак, мы знаем уже достаточно много, чтобы приступить к Основному Открытию.

Что получится, если векторно перемножить напряженности обоих полей – электрического и магнитного? Получим новую физическую величину, размерность которой есть

$$[EH] = \frac{В}{м} \cdot \frac{А}{м} = \frac{Вт}{м^2} = \frac{Дж}{с \cdot м^2}.$$

Но ведь это размерность плотности потока энергии! (Вспомним, что плотность тока, равная плотности потока заряда,

имеет размерность  $[j] = \frac{Кл}{с \cdot м^2}$ , плотность потока массы имеет

размерность  $\frac{кг}{с \cdot м^2}$  и т.д.) Исторически эта величина называется

вектором Умова–Пойнтинга  $\vec{P}$ . Но если это вектор, то куда он направлен? Конечно, перпендикулярно обоим векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (а не вдоль одного из них – чтобы другому не было обидно). Причем так, что векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{P}$  образуют правую тройку, как оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . (Это очень похоже и на расположение векторов в электромагнитной волне, которая потому и называется поперечной, что  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в ней перпендикулярны направлению ее распространения, т.е. тому направлению, в котором течет энергия волны.) Взаимное расположение этих векторов и их векторные линии качественно изображены на рисунке 1,в.

Заметим, что внутри провода вектор  $\vec{P}$  направлен строго к оси, поскольку там поле  $\vec{E}$  параллельно оси. Кроме того, на оси его величина равна нулю, поскольку в произведение входит множитель  $H$ , обращающийся в ноль на оси (см. рис.3,б).

Что же получается? Плотность потока энергии во всем пространстве течет к проводу, а затем направляется кратчайшим путем к его оси, погибая на расстоянии, равном его радиусу? Но энергия не может бесследно исчезнуть. И действительно, она просто превращается в другой вид – в тепло. Это и есть джоулевы потери.

Возьмем участок провода длиной  $l$ , на концах которого разность потенциалов равна  $U$ . Поскольку у поверхности провода напряженности магнитного и электрического полей равны,

соответственно,

$$H_a = \frac{I}{2\pi a} \text{ и } E_a = \frac{U}{l},$$

то плотность потока энергии через поверхность площадью  $2\pi al$  внутри провода равна

$$H_a E_a \cdot 2\pi al = IU.$$

Если еще учесть, что  $I = U/R$  (где  $R$  – сопротивление этого участка провода), то правую часть последнего равенства можно записать и в виде

$$I^2 R \text{ или } \frac{U^2}{R}.$$

Все эти формулы для тепловой мощности хорошо знакомы каждому здравомыслящему школьнику. Это еще раз убеждает, что «все в порядке».

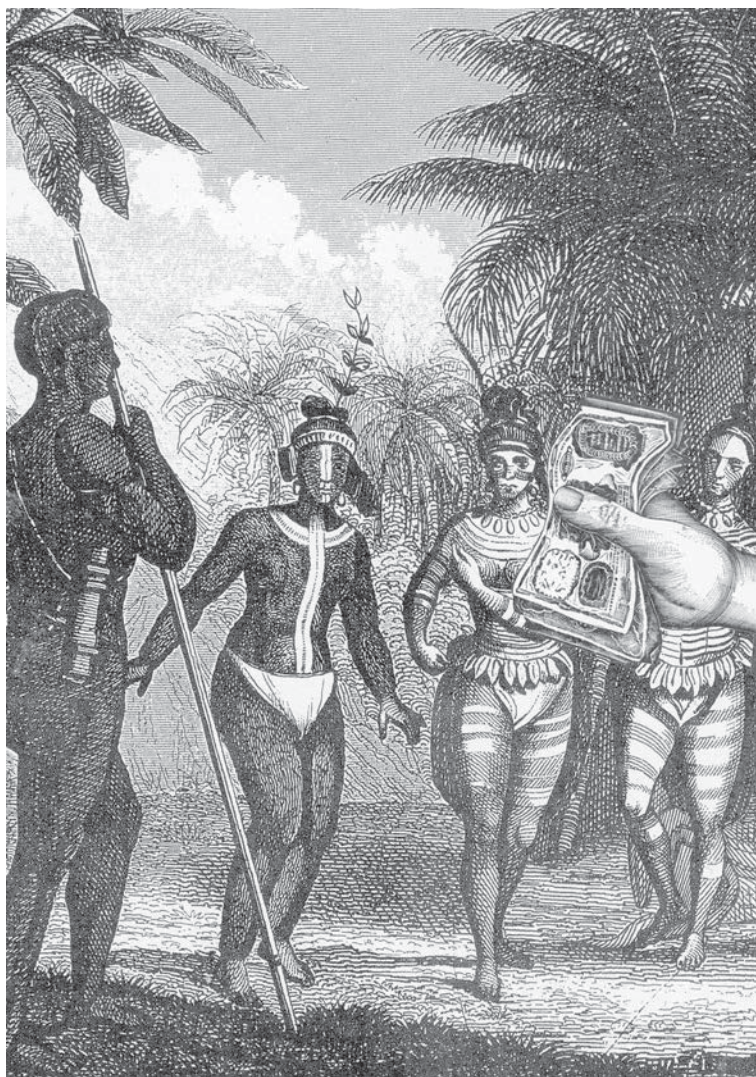
А откуда же берется этот поток энергии во всем пространстве? Иные студенты отвечают в духе модных оккультистов: из Космоса. Ну и замечательно, тогда не нужны ветряные мельницы, двигатели внутреннего сгорания, электростанции – в Космосе энергии сколько угодно. А иные считают, что энергия от источника к потребителю течет внутри провода вдоль его оси. Для них описанная картина полей и потока энергии действительно может служить полезным открытием.

И последнее открытие. Если энергия электромагнитного поля погибает в проводе, превращаясь в тепло, то зачем нужны провода? Долой их?! И не нужны миллионы тонн меди и алюминия, и нет никаких потерь?!

Увы, это открытие не состоится. Действительно, пространственная структура электрического и магнитного полей такова, как мы изобразили. Действительно, энергия течет извне и «пропадает» внутри провода. Но ее линии тока идут, конечно, из той батарейки, которая гонит электрический ток (попробуйте изобразить это самостоятельно). И провода нужны как раз для того, чтобы создать именно такое распределение плотности потока энергии в пространстве. А тепловые потери – это плата за передачу энергии.

Кстати, что если мы разделим произведение  $EH$  на скорость света? Получится новая величина с размерностью Дж/м<sup>3</sup>. Естественно назвать ее объемной плотностью энергии (вспомним о массовой плотности, размерность которой кг/м<sup>3</sup>). Выходит, вектор Умова–Пойнтинга указывает, куда и с какой скоростью перемещается плотность энергии.

## ОПТИКА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА



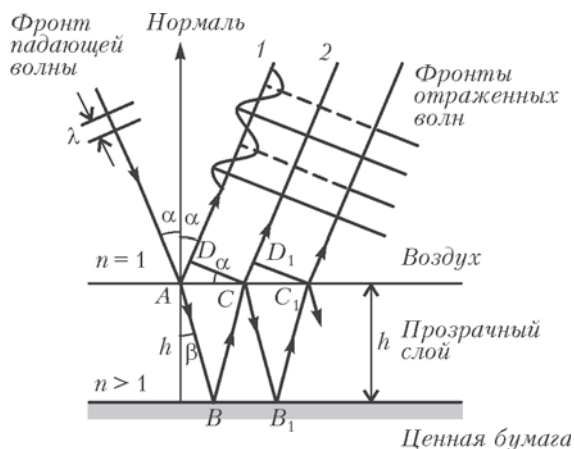
## ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НА ОСТРОВАХ СИНЕГО МЫСА

Ю.Маношкин, А.Стасенко

*Сребролюбие... это грех чрезвычайной важности – в нем фактическое отвержение веры в Бога, любви к людям и пристрастие к низшим стихиям. Оно порождает злобу, окаменение, многозаботливость.*

А.Ельчанинов

Во время оно, когда на вулканических островах Синего Мыса (говорят, были такие) началась Перетряска, иные умельцы бросились подделывать туземные купюры, и особенно охотно – достоинством в сто круазейро. И вот тогда-то один островитянин по кличке Отличник вспомнил о *многолучевой интерференции*. Он предложил покрывать достоинство ценной бумаги («сто») прозрачным слоем строго постоянной толщины (см. рисунок). Если купюру поворачивали на  $180^\circ$  (от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$ ) при освещении светом определенной длины волны, то из-за многократного отражения света от границ этого слоя число «сто» вспыхивало определенное число



раз, которое мог сосчитать любой островитянин. (Предполагалось, конечно, что фальшивомонетки не скоро доберутся до этой технологии.) А именно – при освещении ценной бумаги синим светом (любимый цвет на тех островах) купюра «вспыхивала» 21 раз.

Но нашелся на островах Хулиган, который пожелал оценить свойства этого прозрачного покрытия – его толщину и показатель преломления. Зачем ему это понадобилось, неизвестно – возможно, он был просто любознателен. Он поставил проблему так.

Нужно найти условие «вспыхивания» освещаемого слоя при определенном угле падения  $\alpha$  света известной длины волны  $\lambda$ . Из рисунка прежде всего нужно найти разность хода между двумя соседними отраженными лучами 1 и 2 (луч 1 отразился в точке  $A$ , луч 2 прошел внутрь слоя и отразился от его нижней границы в точке  $B$ , а затем, преломившись в точке  $C$ , опять вышел в воздух):

$$\Delta_{12} = AD - ABC \cdot n.$$

Заметим, что в этом выражении путь луча внутри пленки умножен на коэффициент ее преломления  $n$ . Это связано с тем, что свет внутри пленки движется в  $n$  раз медленнее (по определению,  $n$  равно отношению скоростей света в вакууме (воздухе) и в веществе пленки), чем на участке  $AD$ . (Поэтому и длина волны внутри пленки будет в  $n$  раз меньше, чем в воздухе.) Но в точке  $C$  часть света вновь отразится вниз, в точке  $B_1$  – снова вверх и т.д., так что в результате из пленки, освещаемой под углом  $\alpha$ , выйдет много параллельных лучей (тоже под углом  $\alpha$ , так как «угол падения равен углу отражения»). На самом деле, мы должны понимать, что эти лучи не просто тонкие линии, указывающие лишь направление движения волн. Эти лучи перпендикулярны к фронтам волн – например, отрезки  $DC$ ,  $D_1C_1$ , ... изображают куски этих фронтов.

Таким образом, происходит сложение многих волн, образовавшихся в результате последовательных отражений падающего света от нижней границы прозрачной пленки. Это и есть многолучевая интерференция.

При каком условии освещенная цифра «вспыхнет» в отраженном свете? Ясно, что для этого нужно, чтобы «гребни» (или «впадины») всех волн совпадали. А для этого нужно, чтобы разность хода между двумя соседними лучами составляла целое число длин волн:

$$\Delta_{12} = m(\alpha)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

Запись  $m(\alpha)$  подчеркивает, что это целое число волн – оно называется *порядком интерференции* – зависит от угла падения света.

Теперь немного математики. Из треугольника  $ADC$  найдем  $AD = AC \sin \alpha$ . Из треугольника  $ABC$  найдем  $AC = 2h \operatorname{tg} \beta$  (где  $\beta$  – угол преломления) и  $ABC = 2h / \cos \beta$ . Собирая все это, получим

$$\Delta_{12} = 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \frac{2h}{\cos \beta} n ,$$

или, вспомнив закон преломления, –

$$\Delta_{12} = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} . \quad (2)$$

Отличник задумал систему контроля так, что между  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$  расположено 10 максимумов («вспыхиваний»), не считая самих границ этого интервала углов. Тогда, подставляя эти значения углов в равенство (2) и вычитая из одного соотношения другое, Хулиган получил

$$2h \left( n - \sqrt{n^2 - 1} \right) = (10 - 11) \lambda . \quad (3)$$

(Он учел, что при  $\alpha = \pi/2$  тоже может быть следующий за десятым максимум, но это было трудно проверить – скользящий свет слепил глаза.)

Однако в уравнении (3) оказалось два неизвестных:  $h$  и  $n$  (для синего света  $\lambda = 0,45$  мкм). Поэтому Хулиган схитрил так: он стал освещать купюру светом других длин волн и нашел, что при увеличении длины волны при нормальном падении максимум отраженного света сначала постепенно исчезает, но вновь появляется, когда это изменение достигает  $\Delta \lambda = 0,0121$  мкм. Это означает, что для света с длиной волны  $\lambda + \Delta \lambda$  та же разность хода  $\Delta_{12}$  в выражении (1) достигается не при  $m$ , а при  $m - 1$ , т.е.

$$m(0) \lambda = (m(0) - 1) (\lambda + \Delta \lambda) .$$

Отсюда легко найти

$$m(0) = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} + 1 = \frac{0,45}{0,0121} = 38 ,$$

и, записывая при  $\alpha = 0$  соотношение (2) в виде

$$2hn = m(0) \lambda = \left( \frac{\lambda}{\Delta \lambda} + 1 \right) \lambda ,$$

получаем второе уравнение для определения  $h$  и  $n$ .



Итак, имеется система уравнений

$$\begin{cases} 2h(n - \sqrt{n^2 - 1}) = (10 - 11)\lambda, \\ 2hn = 38\lambda. \end{cases}$$

Для ее решения один здравомыслящий математик посоветовал разделить почленно эти уравнения друг на друга – тогда сократятся  $h$  и  $\lambda$  и останется одно уравнение для  $n$ . Решив его и подставив это значение  $n$  в любое из двух уравнений системы (очевидно, проще во второе), найдем  $h$ . В результате получим  $n \approx 1,4$ ;  $h \approx 6$  мкм (с точностью до нескольких процентов).

Надо ли решать точнее, учитывая «ошибку эксперимента», уже включенную в соотношение (3)? А что еще не учтено в приведенных рассуждениях? Вообще говоря, коэффициент преломления вещества зависит от длины волны проходящего света, чем пренебрегалось. Пренебрежено также поглощением света внутри слоя. Кроме того, наш Хулиган где-то слышал, что в выражении (2) надо то ли добавить, то ли вычесть еще «полволны  $\lambda/2$ », которые, говорят, то ли приобретаются, то ли теряются при отражении света от оптически то ли более плотной среды, то ли... Но он решил с этими тонкостями не возиться, так как в выражении (3) уже содержится возможная ошибка, проистекающая от того, что углы, при которых достигаются интерференционные максимумы, он не измерял точно, а считал, как и все островитяне, только общее число максимумов между углами  $-90^\circ$  и  $+90^\circ$ .

А что же островитяне? Они остались довольны новыми купюрами, помня слова Антона Чехова, один персонаж которого считал, что кислород – это «...химиками выдуманный воздух. Говорят, что без него жить невозможно. Пустяки. Только без денег жить невозможно».



## НЕБО СИНЕЕ, СОЛНЦЕ КРАСНОЕ

*А.Стасенко*

*Ни пустоты, ни тьмы нам не дано:  
Есть всюду свет, предвечный и великий...*

И.Бунин

Как известно, антенны созданы для того, чтобы излучать и принимать электромагнитные волны. Отдельный атом тоже излучает, переходя в более низкое энергетическое состояние. Но он может и принимать электромагнитные волны определенных частот, возбуждаясь при этом, т.е. переходя в состояние с большей энергией. Так что атом в какой-то мере есть маленькая антенна. Только в атоме, согласно классической модели, электроны движутся по замкнутым траекториям, в простейшем случае – по окружностям. А движение по окружности радиусом  $a$  можно представить как сумму двух гармонических колебаний, происходящих в той же плоскости, но во взаимно перпендикулярных направлениях и со сдвигом фаз, равным  $90^\circ$  (рис.1,а):

$$x = a \cos \omega t ,$$

$$y = a \sin \omega t ,$$

$$x^2 + y^2 = a^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = a^2 .$$

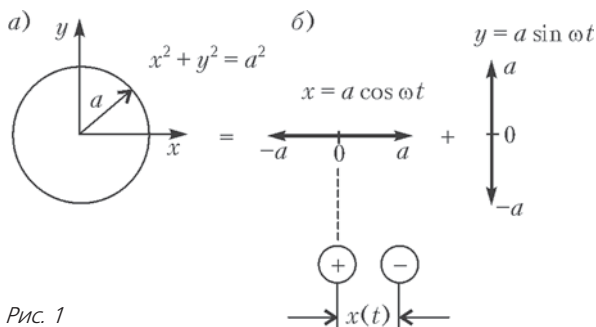


Рис. 1

Рассмотрим поэтому движение зарядов только вдоль одной оси, например  $x$ .

Вообразим простейшую «антенну» в виде двух точечных одинаковых по модулю и противоположных по знаку зарядов  $\pm q$ , расстояние между которыми в данный момент равно  $x(t)$  (рис. 1,б). Эта система зарядов – диполь – электрически нейтральна, тем не менее при постоянном значении  $x$  (плечо диполя) она создает электрическое дипольное поле, которое убывает с расстоянием быстрее, чем поле точечного заряда. Можно показать, что модуль напряженности дипольного поля пропорционален  $r^{-3}$ , но нас сейчас это статическое поле не интересует.

Пусть положительный заряд неподвижен (например, тяжелое ядро атома), а отрицательный («центр тяжести» электрона или электронного облака) движется относительно него. Чтобы точно описать возникающее *переменное* электромагнитное поле, необходимо использовать систему уравнений Максвелла, а в случае реального микрообъекта (атома) – и квантовую физику. Однако, этим лучше заняться, поступив в Московский физико-технический институт (или в Московский университет). Сейчас же постараемся сделать некоторые приближенные оценки, опираясь на теорию размерностей и сведения об электромагнетизме из школьной физики. Для удобства даже перенумеруем необходимые нам качественные соображения.

1) Неподвижный заряд не излучает энергию. То же очевидно и в отношении заряда, движущегося с постоянной скоростью (равномерно и прямолинейно). Иначе его излучение можно было бы использовать, скажем, для определения того, какая из инерциальных систем отсчета движется, а какая неподвижна, что запрещено в физике.

Итак, излучать энергию может только заряд, движущийся ускоренно. Например, заряд, колеблющийся по упомянутому выше гармоническому закону  $x(t) = a \cos \omega t$ , заведомо движется ускоренно, и его ускорение равно  $x'' = -\omega^2 x(t)$ .

2) Энергия, излучаемая ускоренно движущимся зарядом, течет в радиальном направлении (не обязательно равномерно по всем направлениям; рис.2). При этом предполагается, что излучение рассматривается на больших расстояниях, намного превышающих амплитуду колебаний  $a$ .

Кроме того, энергия течет от излучающего заряда независимо от того, движется ли он вправо или влево от положения равновесия. Значит, поток энергии должен зависеть от четной степени ускорения. Какой именно? Ну конечно, второй, поскольку...

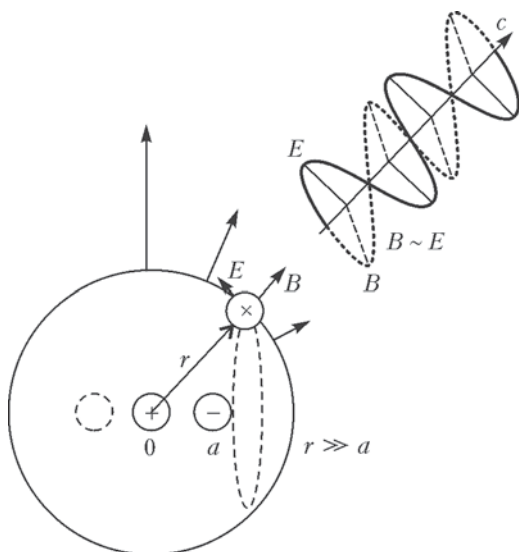


Рис. 2

3) Плотность потока энергии электромагнитной волны пропорциональна произведению электрического и магнитного полей, а последние пропорциональны друг другу, в силу линейности уравнений электромагнетизма.

Уже то, что мощность излучения пропорциональна четвертой степени частоты ( $W \sim \omega^2 \sim \omega^4$ ), позволяет объяснить такой красивый факт природы, как голубизна неба. Дело в том, что Солнце излучает довольно широкий спектр длин электромагнитных волн  $\lambda$  (рис.3). Наш глаз приспособился видеть основную, наиболее энергетичную часть, заключенную в пределах  $\lambda = 0,4 - 0,8$  мкм. Короткие волны соответствуют фиолетовому концу этого спектра, длинные — красному. Но чем меньше длина волны, тем выше частота ( $\omega = 2\pi c/\lambda$ ). И, согласно полученному выше соотношению, короткие (или высокочастотные) волны, возбуждая частицы атмосферы (и таким образом превращая их в излучающие диполи), должны рассеиваться сильнее длин-

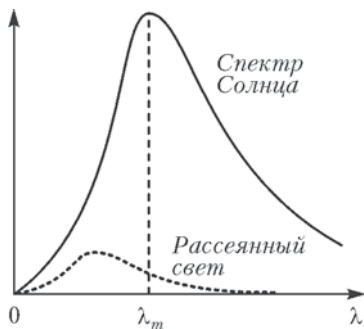


Рис. 3

ных — да еще в четвертой степени (см. точечную кривую на рисунке 3).

Ясно также, почему Солнце кажется красным на закате: в это время его лучи проходят в атмосфере самый длинный путь, и из них отсеиваются во все стороны именно голубые лучи, что относительно обогащает красную часть спектра.

Но продолжим рассуждения о структуре волны, излучаемой ускоренно движущимся зарядом.

4) Векторные линии магнитного поля  $\vec{B}$  имеют вид окружностей в плоскостях, перпендикулярных направлению движения заряда, а поскольку векторы  $\vec{B}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{E}$  образуют *правую тройку* (электромагнитная волна поперечна), то вектор  $\vec{E}$  должен быть направлен по касательной к сфере радиусом  $r$ . Все это и показано на рисунке 2.

Все, что мы наговорили до сих пор, дает возможность заключить, что излучаемая мощность может быть записана в виде  $W \sim q^2 x''^2$ . А там, где появляется кулон в квадрате, в СИ всегда появляется множитель  $1/(4\pi\epsilon_0)$ , имеющий размерность м/Ф. Но ведь  $\text{Кл}^2/\text{Ф} = \text{Дж}$  (вспомним хотя бы формулу для энергии конденсатора), а размерность  $W$  должна быть Вт = Дж/с. Следовательно, нужно еще разделить на куб скорости... чего? Конечно же, света. Итак,

$$W \sim \frac{q^2 x''^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Точная формула

$$W = -\frac{2}{3} \frac{q^2 x''^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (*)$$

не намного отличается от полученного нами выражения (знак минус указывает на убыль энергии).

Но что же это получается? Электроны в атомах движутся вокруг ядер ускоренно (вспомним, что движение по окружности — ускоренное), значит, согласно изложенным представлениям классической физики, они должны излучать энергию и в конце концов упасть на ядра? Оценим время такого падения. Сумма кинетической и потенциальной энергий электрона на круговой орбите радиусом  $a$  равна

$$\mathcal{E} = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

(здесь предполагается простейший случай атома водорода:  $m_e$  — масса электрона,  $e$  — его заряд). Учитывая, что сила Кулона

сообщает электрону центростремительное ускорение:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = m_e \frac{v^2}{a},$$

найдем

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Разделив эту начальную (до излучения) суммарную энергию  $\mathcal{E}$  на скорость ее потерь  $W$ , получим оценку времени излучения  $\tau$ . Будем считать, что излучение происходит за много периодов колебаний, и осредним выражение (\*) по времени. Используем известный факт:  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ . Тогда

$$\tau \sim \frac{\mathcal{E}}{W} \sim \frac{1}{\omega^4} \left( \frac{c}{a} \right)^3 = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^4 \frac{1}{a^3 c}.$$

Подставим сюда характерные величины: длину волны  $\lambda_m = 0,55$  мкм, соответствующую максимуму солнечного спектра (кстати, это зеленый свет, так что не случайно Солнце относится к спектральному классу зеленых звезд), и радиус орбиты  $a \approx 1 \text{ \AA}$  (эта величина – один ангстрем – и введена специально для измерения атомарных размеров). В результате получим

$$\tau \sim \frac{(5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м})^4}{(2\pi)^4 \cdot (10^{-10} \text{ м})^3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \approx 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Значит, за доли микросекунды электроны должны были бы упасть на ядра, и наш мир перестал бы существовать!?

Но тут на помощь пришла квантовая теория: она разрешила электронам долго «жить» на избранных орбитах (подобно тому, как заботливое жилищное управление разрешает квартиросъемщикам спать на этажах, а не на лестничных маршах). Однако, это уже другая история...

## ХОЧЕШЬ ОБЩАТЬСЯ – ИЗЛУЧАЙ

А.Стасенко

*Возможность воздействия одного тела на другое на расстоянии через пустоту без посредства чего-нибудь еще... для меня это настолько бессмысленно, что, по-моему, к такому заключению никогда не может прийти человек, обладающий достаточной способностью разбираться в философских вопросах.*

И.Ньютон

Действительно, если вы потеряли в лесу родных или знакомых, рекомендуется кричать «ау!». Правда, тут нет пустоты – акустические волны распространяются в воздухе. Но во Вселенной громадную роль играют волны, способные распространяться и в вакууме.

Представим себе два заряда противоположных знаков – один тяжелый положительный, другой легкий отрицательный, вращающийся вокруг первого (рис.1). Кто подумал, что это атом водорода с протоном в центре, не совсем прав, поскольку микромир нужно описывать при помощи квантовой механики, а мы собираемся остаться в рамках «обычной» физики. Просто имеем два заряда, и один из них вращается вокруг другого.

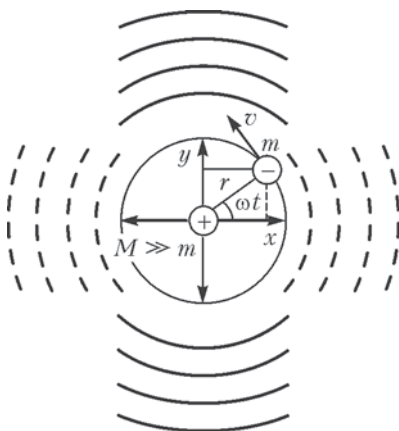


Рис. 1

Ясно, что это *вращение* можно представить как два взаимно перпендикулярных *колебания* со сдвигом фаз на  $\pi/2$ :

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \omega t + r^2 \sin^2 \omega t = r^2$$

(ибо, как хорошо известно,  $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ ). Тут мы еще раз вспомнили, что даже *равномерное* движение по окружности есть ускоренное движение, да не одно, а два. Можно сказать также, что мы имеем два *диполя* (с переменным расстоянием между зарядами).

Но, как учат в школе (и правильно делают), каждый колеблющийся заряд излучает, причем мощность этого излучения пропорциональна четвертой степени частоты. В результате осциллятор – в нашем случае это диполь – каждую секунду должен терять свою энергию  $W$  так, что

$$\frac{dW}{dt} \sim -\omega^4. \quad (*)$$

Выразим энергию диполя через расстояние между зарядами  $r$  и величину заряда  $q$ . Сила кулоновского взаимодействия (притяжения) зарядов равна

$$F_K = -k \frac{q^2}{r^2},$$

следовательно, потенциальная энергия взаимодействия есть

$$W_{\text{п}} = -k \frac{q^2}{r}.$$

Кинетическую энергию  $W_K = mv^2/2$  (центральный заряд тяжел и «неподвижен») можно переписать с учетом того, что кулоновская сила обеспечивает центростремительное ускорение, равное

$$\frac{v^2}{r} = \frac{kq^2}{mr^2}.$$

Тогда полная энергия системы, равная сумме потенциальной и кинетической энергий, будет

$$W = W_{\text{п}} + W_K = -\frac{kq^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{kq^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{kq^2}{r}$$

(отрицательный знак описывает тот факт, что движущийся заряд не может уйти «на бесконечность»).

Поработаем теперь над выражением (\*), стараясь уравнять хотя бы размерности его обеих частей.

Прежде всего заметим, что изменение энергии в единицу времени пропорционально самой энергии в данный момент времени. Это довольно общее положение. Например, убыль атомов некоего радиоактивного изотопа пропорциональна имею-

щемуся количеству атомов:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N ,$$

где  $\tau$  – характерное время распада, откуда получается экспоненциальный закон

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} .$$

Или, увеличение числа микробов в питательном бульоне в единицу времени пропорционально их наличному количеству:

$$\frac{dn}{dt} = +\alpha n ,$$

откуда опять-таки

$$n = n_0 e^{\alpha t} .$$

Точно так же скорость роста денежного вклада в банке пропорциональна наличности в данный момент (если не учитывать «черных» вторников, сред,...).

Таким образом, выражение (\*) можно уже несколько конкретизировать:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\omega^4 .$$

В результате слева имеем размерность  $1/c$ , справа  $1/c^4$ . Далее, поскольку речь идет об электромагнитном излучении, совершенно естественно вспомнить о скорости света в вакууме  $c$ , которая имеет размерность  $m/s$  и содержит в знаменателе так нужную нам секунду в первой степени:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{\omega^4}{c^3} .$$

Но что это – теперь справа в знаменателе стоит лишний  $m^3$ . А у нас как раз есть характерный размер  $r$ ! Запишем:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{r^3 \omega^4}{c^3} \sim -\frac{1}{\tau} .$$

Наконец, с размерностями все в порядке, но это все еще не равенство: мы не знаем, какой *безразмерный* множитель может появиться в правой части. Ну и Бог с ним – мы и так знаем достаточно много. Например, можно оценить характерное время  $\tau$ , за которое энергия осциллятора заметно изменится (например, в два раза):

$$\tau \sim \frac{c^3}{r^3 \omega^4} .$$



Если говорить об излучении атома в оптическом диапазоне, можно взять  $\omega \sim 10^{16} \text{ 1/c}$ ,  $r \sim 10^{-10} \text{ м} = 1 \text{ \AA}$ . Тогда

$$\tau \sim \frac{(3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^3}{(10^{-10} \text{ м})^3 (10^{16} \text{ 1/c})^4} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ с}.$$

С точки зрения «доквантовой» механики, за это характерное время все электроны должны были бы упасть на ядра своих атомов и Вселенная прекратила бы свое существование, по крайней мере в комфортном для нас виде. Этот Конец Света предотвратила квантовая механика: она позволила электронам вращаться на некоторых избранных (квантованных) уровнях достаточно долго. Но наша оценка не бесполезна: она оказалась оценкой характерного *времени перехода* между этими разрешенными уровнями.

Однако перейдем теперь к излучению другого рода – гравитационному. Вселенной управляет всемирное тяготение. И даже если муха в соседнем доме перелетит с одной стены на другую, это в принципе изменит распределение гравитационного поля во всей Вселенной, в том числе и у вашего рабочего стола. И это изменение передается при помощи гравитационных волн, которые распространяются со скоростью  $c$ , как и электромагнитные волны в вакууме. Только, в отличие от последних, от гравитационных волн нельзя экранироваться – они проникают всюду, но именно потому их и нелегко зарегистрировать. А было бы так заманчиво следить за перемещением любого интересующего нас тела!

Конечно, полет мухи мало что изменит во Вселенной. Другое дело – движения небесных тел.

Основными источниками гравитационных волн являются быстро вращающиеся пульсары, входящие в двойные звездные системы (рис.2,*а*); ими могут быть также неосесимметричные волчки (рис.2,*б*). Иными словами, для излучения гравитационных волн важна определенная асимметрия систем; их излучение является не дипольным, а *квадрупольным*. (Те, кто бывал на дискотеках, понимают, что «квадро» означает «четыре».)

Попробуем описать это излу-

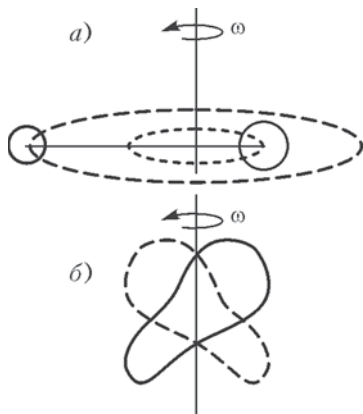


Рис. 2

чение. Если гравитирующий волчок можно охарактеризовать массой  $m$ , характерным размером  $r$  и скоростью вращения  $\omega$ , то легко понять, что его вращательная энергия  $W \sim mr^2\omega^2$ . Оказывается, скорость убыли этой энергии тоже пропорциональна  $\omega^4$ , так что по аналогии можно записать

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\omega^4.$$

Однако сюда должны войти величины, характерные именно для гравитации: конечно же, постоянная всемирного тяготения  $G$ , имеющая размерность  $\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ , и скорость распространения  $c$  с размерностью  $\text{м} / \text{с}$ :

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{G\omega^4}{c^5}.$$

Но теперь справа имеем размерность  $1 / (\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг})$ , а нужна  $1 / \text{с}$ . Ясно, что правую часть надо умножить на  $mr^2$  — и все будет в порядке:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \sim -\frac{Gmr^2}{c^5} \omega^4 \sim -\frac{1}{\tau}.$$

По этому выражению можно найти и характерное время  $\tau$  замедления вращения звездной системы, излучающей гравитационные волны. Но это предоставим жителям ее планет... если кому-то нравится жить в поле двойной звезды.

## **РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ**

*М.Лившиц*

Всем известно, что микроскоп нужен для того, например, чтобы пересчитать число микробов на предметном столике, телескоп – чтобы пересчитать звезды на небе, радиолокатор – чтобы установить число летательных аппаратов в небе и расстояния до них.

В этой статье речь пойдет о важнейшем свойстве физических приборов – их разрешающей способности, т.е. величине наименьших деталей объектов измерения, различаемых в процессе измерения. Именно разрешающая способность является главной характеристикой качества применяемого измерителя (даже более важной, чем точность измерений). Например, не только от увеличения микроскопа зависит его качество. Если устройство микроскопа не обеспечивает раздельное восприятие достаточно мелких деталей объекта, то получаемое изображение не улучшится даже при значительном росте увеличения. Мы получим только более крупную, но такую же нечеткую картинку рассматриваемого предмета. Кроме того, сами ошибки измерения могут быть определены только после разрешения, т.е. после выделения данной детали объекта из других.

Покажем, какие физические свойства дистанционных (неконтактных) измерителей непосредственно влияют на получающееся при их использовании разрешение и какими методами можно добиться улучшения разрешающей способности таких приборов.

Сначала дадим количественную оценку. Чем более мелкие детали объектов могут быть выделены данным прибором в процессе измерения, тем лучше (выше) его разрешающая способность. Для различных приборов существуют различные определения и разные формулы для количественной оценки разрешающей способности в зависимости от целей и методов: например, оценивается ли разрешение деталей предмета (микроскоп, бинокль, телескоп) или отдельных линий в спектре излучения

(призма, дифракционная решетка и другие спектральные устройства), используется ли независимость наблюдения и измерения координат нескольких целей (радиолокатор, гидролокатор, эхолотатор животного) и т.п. Однако общепринятой основой количественной оценки разрешающей способности является критерий Рэлея, первоначально установленный для случая раздельного наблюдения двух точечных источников света (разрешение двойных звезд). Его обобщение, позволяющее использовать этот критерий в самых разных случаях, осуществляется следующим образом.

Пусть входное воздействие на измерительный прибор состоит из двух пиков, отстоящих на интервал  $\Delta x$ ; при этом на выходе прибора от каждого пика получается «отклик» в виде более

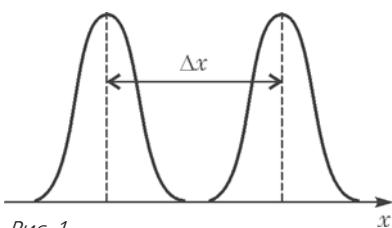


Рис. 1

размазанного по  $x$  всплеска конечной ширины, характеризующий свойства прибора и называемый аппаратной функцией (рис.1). Тогда разрешающей способностью по Рэлею называют минимальный интервал  $\Delta x_{\min}$  между воздействиями двух пиков,

при котором суммарный отклик еще имеет вид двугорбой кривой (рис.2,а). Если уменьшить  $\Delta x$ , вершушка суммарного всплеска уплощается и всплески сливаются в один (рис.2,б).

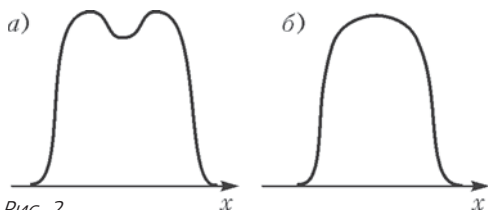


Рис. 2

Какие же параметры волн, используемых в дистанционных измерителях, определяют величину разрешающей способности? Оказывается, таким параметром является степень когерентности волн (латинское слово «когерентный» означает «находящийся в связи»).

Прежде вспомним о когерентности колебаний. Колебания называются когерентными, если разности фаз и отношения амплитуд колебаний остаются постоянными в течение всего времени наблюдения. В простейшем случае когерентными яв-

ляются два синусоидальных колебания  $A \cos(\omega t + \alpha)$  и  $B \cos(\omega t + \beta)$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные величины. Поскольку волновые процессы определяются колебаниями во всех точках пространства, где эти волны существуют, необходимым условием когерентности волн является когерентность колебаний, происходящих в каждой данной точке волны в течение времени наблюдения.

Более общим и кратким является определение некогерентности волн: пучки света или других волн будут некогерентными, если разность фаз между колебаниями во всех точках пространства, где эти волны существуют совместно, многократно и нерегулярным образом изменяется в течение времени наблюдения.

Теперь постараемся установить связь разрешающей способности измерителя со степенью когерентности волн. Наиболее наглядно это можно сделать на примере радиолокации – способе определения местонахождения объектов с помощью радиоволн.

Кратко напомним принцип работы импульсной радиолокационной станции – РЛС. На рисунке 3 изображена блок-схема РЛС. Здесь 1 – передатчик, 2 – антенный переключатель, 3 – антенна, 4 – диаграмма направленности антенны, 5 – приемник, 6 – индикатор. Передатчик РЛС с помощью узконаправ-

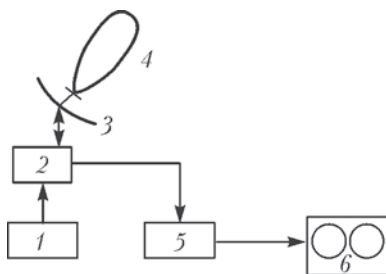


Рис. 3

ленной антенны производит периодическое облучение пространства кратковременными цугами радиоволн (так называемыми зондирующими, т.е. «ощупывающими», импульсами). Поворотом антенны (или другими способами) производится изменение направления излучения радиоволн и, тем самым, осуществляется последовательное зондирование большего или меньшего сектора пространства (или круговой обзор). Отраженные от различных целей импульсы поступают (обычно через ту же антенну) в приемник РЛС. При этом определение угловых координат целей основано на использовании диаграммы направленности антенны на излучение и прием. Измерение дальности  $D$  производится по измерению времени запаздывания  $t_{\text{зап}}$  прихода отраженного от цели импульса относительно момента излучения зондирующего импульса:

$$D = \frac{ct_{\text{зап}}}{2},$$

где  $c$  – скорость света. Двойка в знаменателе появляется из-за того, что время запаздывания складывается из времени прохождения зондирующего импульса до цели и такого же времени прохождения отраженного импульса до РЛС.

Разрешающей способностью РЛС по углу называется наименьшая разность углов  $\Delta\alpha$  между направлениями на две цели, находящиеся на одной дальности, при которой отраженные импульсы от них наблюдаются раздельно. Легко видеть, что это

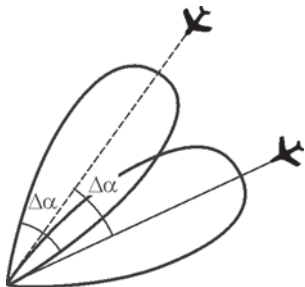


Рис. 4

соответствует простейшему случаю пространственной некогерентности: разрешаются (по углу) те цели, на которые не может одновременно попасть «освещающее» излучение РЛС, так как направления на них отличаются на ширину диаграммы направленности антенны (рис.4).

Разрешающей способностью РЛС по дальности называется наименьшее расстояние  $\delta r$  между двумя целями, находящимися в одном на-

правлении, при котором они наблюдаются раздельно. В так называемых классических РЛС в качестве зондирующего импульса применялся синусоидальный цуг волн постоянной амплитуды. Это объясняется, в частности, тем, что такой цуг легко создать: достаточно на высокочастотный генератор (например, магнетрон) кратковременно подать постоянное по величине высокое напряжение. Однородность структуры цуга приводит к тому, что отраженные от различных целей волны будут иметь одинаковую частоту (если они движутся по направлению к РЛС с одинаковой скоростью или если можно пренебречь эффектом Доплера), в пределах взаимного перекрытия отраженных импульсов они будут когерентны, и разделить цели полностью не удастся. Отраженные от двух целей импульсы будут некогерентны только тогда, когда они не совпадают по времени прихода в приемник РЛС и поэтому не перекрываются на экране индикатора (рис.5). Таким образом, разрешающая способность этих РЛС по дальности составляет

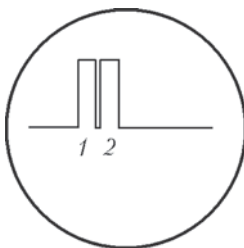


Рис. 5

только тогда, когда они не совпадают по времени прихода в приемник РЛС и поэтому не перекрываются на экране индикатора (рис.5). Таким образом, разрешающая способность этих РЛС по дальности составляет

$$\delta r \approx \frac{c\tau}{2},$$

где  $\tau$  – длительность импульса. Можно

сказать, что в рассматриваемой РЛС некогерентность приходящих от разных целей отраженных сигналов выступает в самом простом виде: как отсутствие их совпадения во времени.

Как видно из последней формулы, для повышения разрешающей способности по дальности необходимо уменьшать длительность импульса  $\tau$ . Но это неизбежно приводит к соответствующему расширению полосы частот. Дело в том, что, с одной стороны, существует фундаментальное соотношение между длительностью  $\tau$  сигнала (например, обрывка синусоиды) и шириной  $\Delta\nu$  его спектра (на шкале частот), в которой сосредоточена основная энергия импульса:

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}.$$

С другой стороны, вполне понятно, что дальность обнаружения цели определяется энергией зондирующего и, следовательно, вернувшегося назад импульса. Значит, при укорочении импульса приходится соответственно увеличивать мощность передатчика, что является непростой задачей.

В поисках выхода из этой ситуации в радиолокации пошли по пути увеличения ширины полосы частот импульса без изменения его длительности: путем перехода от синусоидальной к более усложненной внутренней структуре зондирующего импульса. Так появились РЛС с линейно-частотно-модулированными – ЛЧМ – зондирующими импульсами (рис.6).

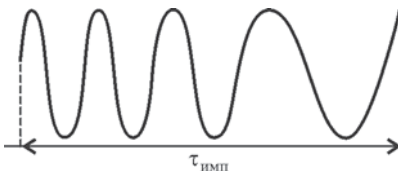


Рис. 6

В этом случае оказывается, что соотношение между длительностью и шириной сигнала будет выполняться уже не для длительности импульса  $\tau_{имп}$ , а для времени когерентности  $\tau_{ког}$ :

$$\tau_{ког} \approx \frac{1}{\Delta\nu} \left( \text{где } \Delta\nu \gg \frac{1}{\tau_{имп}} \right).$$

Правда, для этого в приемнике РЛС вводится дополнительный специальный фильтр, с помощью которого осуществляется сжатие принятого импульса до длительности  $\tau_{сж} = \tau_{ког}$ . Теперь импульсы на экране РЛС будут разделяться при гораздо меньшем расстоянии между целями, чем это было при использовании синусоидального импульса:

$$\delta r = \frac{c\tau_{сж}}{2} \ll \frac{c\tau_{имп}}{2}.$$

Так подтверждается неразрывная связь разрешающей способности дистанционного измерителя со степенью когерентности волн: для повышения (улучшения) разрешающей способности измерителя необходимо ухудшать когерентность используемых волн.

Любопытно отметить, что в живой природе развитие в этом направлении пошло еще дальше. Например, наряду с летучими мышами, эхолокаторы которых также используют ЛЧМ зондирующие импульсы, существуют так называемые «шепчущие» летучие мыши, применяющие еще более широкополосные шумовые импульсы, т.е. высокочастотные импульсы, модулированные «белым» шумом. Они обнаруживают цели при значительно меньших мощностях излучения, при этом обеспечивается также лучшая защита их локаторов от помех, особенно от взаимных, возникающих при одновременной охоте на насекомых больших групп этих летучих мышей.



## ИЗОТОПНЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ

*О.Егоров*

Одним из критериев улучшения условий жизни человека является количество электроэнергии, которое он потребляет. Большая часть электроэнергии, вырабатываемой сейчас, получается из невозобновляемых источников: угля, нефти, газа. Выработка электроэнергии на атомных электростанциях также требует затрат невозобновляемых ресурсов, в частности урана-235. В процессе работы реакторов на этом топливе идет захват тепловых нейтронов ядрами урана-238, при этом «нарабатывается» плутоний-239 и множество других радиоизотопов. Само название «радиоизотопы» означает, что эти вещества радиоактивны, т.е. распадаются с выбросом  $\alpha$ -частиц,  $\beta$ -частиц (электронов) или  $\gamma$ -квантов; при этом выделяется энергия, которую также хотелось бы использовать.

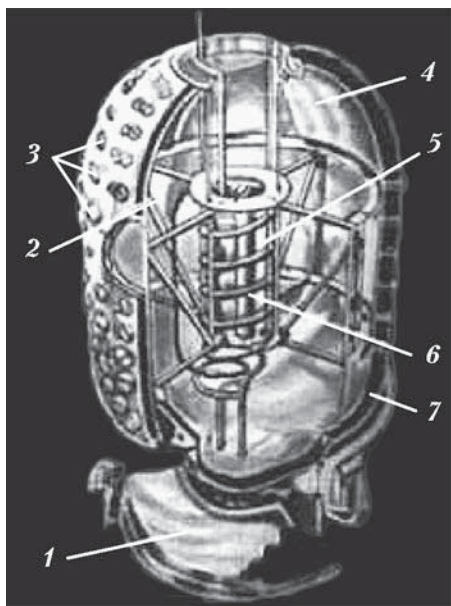
В этой статье мы рассмотрим некоторые радиоизотопные источники электроэнергии, нашедшие широкое и разнообразное применение в самых разных сферах жизнедеятельности человека.

В настоящее время накоплено огромное количество радиоактивных изотопов. При их распаде выделяется тепловая энергия, которую при желании можно преобразовать в электрическую. Тепловая энергия – это конечный продукт торможения в веществе частиц, образующихся при радиоактивных распадах. Первоначально такие источники получили распространение в космосе в необитаемых кораблях, поскольку не надо было беспокоиться о радиационной защите. В дальнейшем они нашли применение и в иных областях человеческой деятельности, где использование других источников энергии либо невозможно, либо совершенно нерентабельно.

В 1999 году исполнилось 40 лет со времени разработки первого в мире изотопного источника электроэнергии. Тогда в рамках проекта «Орион» комиссия по атомной энергии США приняла решение создать целую серию ядерных вспомогательных источников энергии – сокращенно SNAP. В соответствии с этой

программой, в США приступили к разработке устройств, в которых электроэнергия получается при использовании тепла — либо выделяемого при радиоактивном распаде изотопов, либо вырабатываемого при делении ядер урана в небольших ядерных реакторах (таким источникам тока присваивались нечетные номера).

Исторически первым был разработан термоэлектрический генератор SNAP-1A мощностью 125 Вт с ртутной защитой. Работы



*Генератор SNAP-1A. Здесь 1 — тепловая изоляция, 2 — тепловые экраны, 3 — термоэлектрические преобразователи, 4 — пространство, заполненное ртутью, 5 — таблетка церия, 6 — охлаждающий змеевик, 7 — изоляция*

над установкой были закончены в 1960 году после испытания модели с электрическим подогревом. На рисунке хорошо видны таблетки изотопа церия  $^{144}\text{Ce}$ , при радиоактивном распаде которого выделяется тепло, и змеевик охлаждения. Все это находится в пространстве, заполненном ртутью. На поверхности изолирующего покрытия расположены термоэлектрические преобразователи.

Примерно тогда же (в 1959 году) был создан изотопный термоэлектрический преобразователь SNAP-3, предназначенный для проверки основных принципов работы таких устройств. Этот преобразователь был загружен изотопом полония  $^{210}\text{Po}$ . Он имел

начальную мощность 3 Вт и проработал долгие годы.

Радиоизотопные преобразователи типа SNAP-3, загруженные изотопом плутония  $^{238}\text{Pu}$ , имели мощность 2,7 Вт и массу 1,84 кг (2,5 кг вместе с термоэлектрическим преобразователем). Малые размеры (11,875 × 12,25 см) и относительно небольшая масса позволили использовать их в космосе, в частности как вспомогательные источники электроэнергии в спутниках серии

«Транзит-4А» и «Транзит-4Б», запускаемых с 1961 года. Плутоний-238 имеет период полураспада 89 лет, так что преобразователь обеспечивал указанную мощность по крайней мере в течение 5 лет. Следует отметить, что спутник «Транзит-4А» с радиоизотопным источником, запущенный 28 июня 1961 года, — первый случай использования атомной энергии в космосе. Заметим также, что в плутонии-238, в отличие от плутония-239, не может поддерживаться цепная ядерная реакция, а значит, при использовании этого изотопа исключена опасность ядерного взрыва.

Серия радиоизотопных источников типа SNAP-7 с загрузкой изотопом стронция  $^{90}\text{Sr}$  предназначалась уже для использования на земле. Так, SNAP-7A мощностью 5 Вт и SNAP-7B мощностью 30 Вт использовались в качестве источников энергии для навигационных маяков, а источники SNAP-7C мощностью 5 Вт и SNAP-7D мощностью 30 Вт — в автоматических метеостанциях, расположенных в удаленных районах.

Источник SNAP-9A мощностью 25 Вт был разработан для установки на спутнике «Транзит-5». Использованный в нем радиоизотоп плутония  $^{238}\text{Pu}$  обеспечивал надежную работу в космосе в течение 6 лет.

Термоэлектрический генератор SNAP-11 был предназначен для использования при мягкой посадке на Луну. Загруженный в него радиоизотоп кюрия  $^{242}\text{Cm}$  обеспечивал мощность 21–25 Вт в течение 120 дней.

Можно сказать, что использование радиоизотопных источников тока вместо химических позволило в десятки и даже сотни раз увеличить длительность пребывания спутников на орбите. Однако при использовании спутников с большим энергопотреблением мощность радиоизотопных генераторов оказывается недостаточной. При энергопотреблении более 500 Вт, по анализу американской комиссии по использованию атомной энергии, более рентабельно использовать ядерные реакции деления, т.е. маленькие атомные станции.

Сделаем теперь несколько численных оценок.

Мы видели, что радиоизотопные преобразователи SNAP-3 загружаются изотопами полония  $^{210}\text{Po}$  (период полураспада 0,38 года) или плутония  $^{238}\text{Pu}$  (период полураспада 89 лет). Оценим количество радиоизотопа  $^{238}\text{Pu}$ , необходимого для обеспечения такой же тепловой мощности, как и при загрузке  $^{210}\text{Po}$ , если тепловая мощность преобразователя 60 Вт, а масса изотопа полония 0,38 г.

Воспользуемся законом радиоактивного распада. Оба изотопы испускают только  $\alpha$ -частицы. Для грубой оценки можно

составить пропорцию: чем меньше период полураспада, тем больше удельная активность препарата. И если период полураспада изотопа плутония в 234 раза больше периода полураспада изотопа полония, то и масса изотопа плутония, необходимая для создания той же тепловой мощности, должна быть приблизительно в 234 раза больше массы изотопа полония.

Отсюда возникают и особенности применения различных радиоизотопов. Так, если вам нужен источник на короткое время, например в космическом полете, то лучше взять короткоживущий изотоп, масса которого, необходимая для создания нужной тепловой мощности, просто ничтожна. Для использования же таких источников на земле масса загружаемого изотопа ничем не лимитируется, кроме повышения радиоактивного фона вблизи источника. (При толщине стенок контейнера порядка одного сантиметра контейнер полностью поглощает все альфа-частицы. Скажем больше — кожа человека также полностью задерживает эти частицы.)

Оценим теперь активность используемых радиоактивных источников. Зная массу и период полураспада изотопа  $^{210}\text{Po}$ , найдем его активность и выразим ее в кюри ( $1 \text{ кюри} = 3,7 \cdot 10^{10}$  распадов в секунду), если энергия испускаемых  $\alpha$ -частиц равна 5,3 МэВ.

Зная молярную массу изотопа полония и число Авогадро, легко сосчитать, что в 0,38 г изотопа содержится  $1,1 \cdot 10^{21}$  атомов полония. За 0,38 года распадается половина этого количества, а за одну секунду происходит, соответственно,  $4 \cdot 10^{13}$  распадов. Значит, активность препарата составляет 1100 кюри. (Для сравнения напомним, что в Чернобыле активность выбросов была на 4 порядка больше.)

## СЛЕДЫ В КАМЕРЕ

А.Стасенко

*Если в небе пролетает реактивный самолет, то мы ясно видим тянущийся за ним след – облако кристалликов льда, хотя сам самолет не всегда можно разглядеть... Отдельная элементарная частица в десятки миллиардов раз меньше предмета, который можно разглядеть в микроскоп. И тем не менее, пролетая с огромной скоростью через камеру Вильсона или более современный прибор – пузырьковую камеру, такая частица оставляет след, видимый невооруженным глазом.*

К.Форд. Мир элементарных частиц

Камера Вильсона была изобретена порядка сотни лет назад и в течение многих десятилетий служила удобным и информативным прибором экспериментальной ядерной физики.

Идея ее работы проста. Как известно, если парциальное давление  $p$  водяного пара в атмосфере превышает его давление насыщения  $p_n$  при данной температуре – отношение  $S = p/p_n > 1$  назовем пересыщением, то может образоваться туман, выпасть роса... Для самопроизвольной (спонтанной) конденсации пара в чистом воздухе нужны большие значения пересыщения, а именно  $S \sim 10$ . Но если в воздухе присутствуют посторонние частицы, могущие служить ядрами конденсации, то образование микрокапелек может начаться при меньших  $S$ . Вот такими ядрами конденсации и могут быть ионы, образующиеся на пути элементарной частицы. Значит, можно подобрать такое пересыщение пара, которое еще недостаточно для его спонтанной конденсации, но вполне достаточно для появления микрокапелек на ионах, отмечающих траекторию элементарной частицы.

Но как же устроена камера Вильсона?

Самый простой (для изготовления) тип камеры Вильсона, который часто применялся еще полвека назад, приведен на рисунке 1. Стекланный цилиндр  $\Pi$  (диаметром 10–30 см) сверху закрыт толстой стекланный пластинкой, а снизу имеет зачернен-

ную проволочную сетку  $C$ , припаянную к латунному кольцу. Резиновая мембрана  $M$  в нерабочем состоянии горизонтальна. При подаче через отверстие  $O^+$  сжатого воздуха эта мембрана, растягиваясь, поднимается кверху. Чтобы газ в камере был

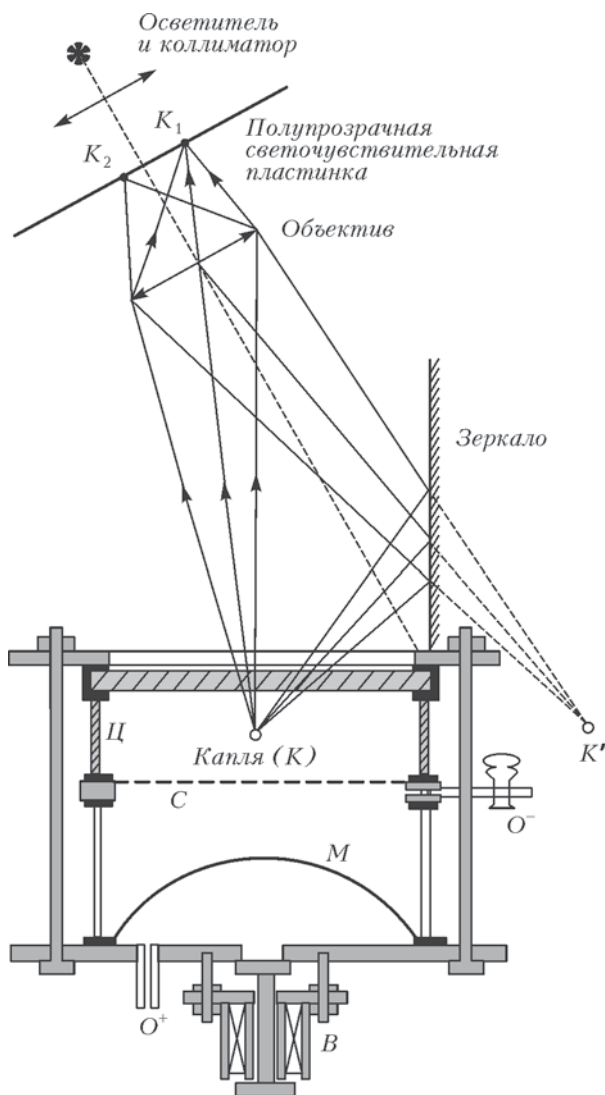


Рис. 1

насыщен паром, в нее вводят несколько кубических сантиметров воды. Если внезапно открыть вентиль  $B$ , то мембрана снова возвратится в начальное горизонтальное положение, смесь воздуха и пара в камере окажется охлажденной, а пар – пересыщенным, и камера будет готова к регистрации пролетающей элементарной частицы. Понятно, что стеклянные стенки нужны для фотографирования следа (трека) частицы, т.е. тех микрокапелек, которые образовались на ионах, а зачерненная сетка нужна для того, чтобы этот след был резче виден на темном фоне. Отверстие  $O^-$  обеспечивает, в случае необходимости, выравнивание давлений в камере и в атмосфере.

Опыт показал, что наилучшее отношение объемов камеры после и до расширения составляет примерно  $4/3$  (для смеси воздуха с водяным паром).

А сколько капелек образуется при полном торможении исследуемой частицы? Например, вдоль трека  $\alpha$ -частицы образуется несколько сот тысяч капелек тумана. А  $\beta$ -частицы создают значительно более тонкие прерывистые следы, в которых на один сантиметр длины приходится всего около 50 ионов. Дело в том, что тяжелая  $\alpha$ -частица (ее масса приблизительно в  $4 \times 1850$  раз больше массы электрона), несущая положительный заряд, уверенно пронизывает электронные оболочки атомов, разрушая их. А  $\beta$ -частицы, сами будучи электронами, более нежно взаимодействуют с отрицательно заряженными электронными облаками атомов.

Итак, осталось успеть сфотографировать конденсационный след элементарной частицы. Один из удобных способов фоторегистрации трека проиллюстрирован на том же рисунке 1. В этом случае фотографируют прямое  $K_1$  и отраженное  $K_2$  изображения некоторой капли ( $K$ ) следа на одной и той же светочувствительной поверхности. Такой способ позволяет получить стереоскопическое изображение следа и определить его положение в пространстве. Это важно, поскольку следы не обязательно горизонтальные и прямые. Например, их можно специально искривить, поместив камеру Вильсона в магнитное поле – тогда частицы, несущие различные электрические заряды, по-разному отклонятся под действием силы Лоренца.

Одна из множества интересных проблем, связанных с камерой Вильсона, касается ее быстродействия. Как скоро после регистрации одной серии следов можно проводить следующий опыт? Давайте сделаем оценку времени, за которое капельки, несущие заряды разного знака, встретятся друг с другом и рекомбинируют.

Вообще говоря, молекулы воды не безразличны к знаку того иона, на котором она собирается конденсироваться. Уже сам Вильсон заметил, что она предпочитает отрицательные ионы. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что электрическое поле молекулы воды очень сложное: оно определяется не только дипольным моментом, но и квадрупольным (квадруполь можно вообразить как два диполя, параллельных друг другу, но противоположно направленных). В результате минимум потенциальной энергии даже для электронейтральной капли воды соответствует состоянию, при котором отрицательные «хвосты» молекул торчат наружу, а положительные – внутрь. Вот почему молекулы воды предпочитают, чтобы в центре капли находился отрицательный ион. Значит, размеры положительно и отрицательно заряженных микрокапель в треке элементарной частицы должны быть, вообще говоря, различны. Но мы в дальнейших оценках пренебрежем этим фактом и будем для простоты рассуждений считать все микрокапли одинаковыми, причем не изменяющимися со временем.

Оценим прежде всего силу сопротивления, которую испытывает капелька, движущаяся в газообразной среде. Конечно, в камере Вильсона находится смесь газов – например, воздуха и паров воды. Для оценки положим, что паров воды пренебрежимо мало, так что капелька движется в почти чистом воздухе, масса молекул которого равна

$$m = \frac{M}{N_A},$$

где  $M = 29$  кг/кмоль – молярная масса воздуха,  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – постоянная Авогадро. Как известно, молекулы воздуха сталкиваются друг с другом в среднем на расстояниях порядка  $10^{-7}$  м (средняя длина свободного пробега молекул). Поэтому для всех капелек, размеры которых меньше этой величины, воздух не является сплошной средой: они «чувствуют» удары отдельных молекул. Учтем это обстоятельство.

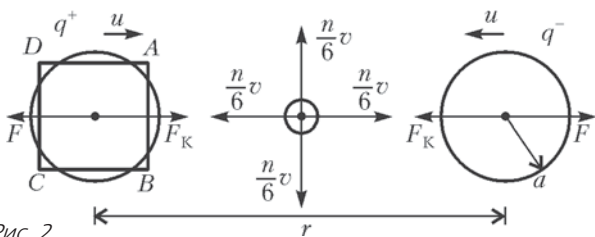


Рис. 2



Для простоты заменим шаровую каплю радиусом  $a$  кубиком с тем же поперечным сечением  $s = \pi a^2$ . И пусть кубик движется параллельно своим ребрам со скоростью  $u$ , много меньшей средней скорости теплового движения молекул  $v$  (рис.2).

А что понимать под  $v$ ? Пусть это будет средняя квадратичная скорость, определяющая среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул воздуха:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \text{ и } v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана, а  $R = 8,31$  Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная.

Ясно, что на переднюю грань кубика  $AB$  в единицу времени налетает число молекул, равное  $\frac{n}{6}(v+u)s$  (число «6» в знаменателе символизирует гипотезу о том, что в изотропном газе молекулы летят равновероятно по шести направлениям). Скорость каждой молекулы перед ударом об эту грань кубика равна  $-(v+u)$ . Если предположить, что удар абсолютно упругий, то молекула отскочит обратно с той же (по модулю) скоростью  $v+u$  в системе координат самого кубика. А в неподвижной системе координат скорость налетающей молекулы, естественно, равна  $-(v+u)+u = -v$ , а отраженной  $(v+u)+u = v+2u$ , так что изменение импульса одной молекулы составит  $m((v+2u) - -(-v)) = 2m(v+u)$ . Значит, сам кубик в единицу времени будет получать от этих молекул тормозящий импульс, равный

$$-\frac{n}{6}(v+u)s \cdot 2m(v+u).$$

Аналогичные рассуждения для грани  $CD$  дадут импульс

$$\frac{n}{6}(v-u)s \cdot 2m(v-u).$$

Таким образом, суммарное изменение импульса кубика в единицу времени, т.е. действующая на него тормозящая сила, составит

$$F = \frac{1}{3}\pi a^2 mn((v-u)^2 - (v+u)^2) = -\frac{4}{3}\pi a^2 \rho v u$$

(здесь учтено, что  $mn = \rho$ ). Точное значение силы сопротивления получится при интегрировании по поверхности сферической частицы потоков молекул с учетом их разброса по скоростям.

Оно равно

$$F_{\tau} = -\pi a^2 \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \rho \left(1 + \frac{\pi}{8}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} v u .$$

Отношение этих сил составляет

$$\frac{F}{F_{\tau}} = \frac{\sqrt{3\pi/8}}{1 + \pi/8} = 0,78 .$$

Не так уж и намного наш результат отличается от точного. Собственно, эти две формулы и отличают грамотного школьника от грамотного студента первого курса Московского физико-технического института.

Пусть теперь две одинаковые капельки, имеющие одинаковые по модулю электрические заряды  $q$ , находятся на расстоянии  $r$  (см. рис.2) и притягиваются друг к другу с кулоновской силой, равной

$$F_{\text{К}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

Давайте рассмотрим так называемое квазистатическое движение, когда скорость капельки хотя и меняется, но в каждый момент времени сила кулоновского притяжения  $F_{\text{К}}$  уравнивается силой сопротивления  $F$  воздуха. Таким образом, для каждой капельки можно записать

$$\frac{4}{3} \pi \rho a^2 v u = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

Поскольку  $r$  — расстояние между капельками, скорость каждой из них равна

$$u = \frac{1}{2} \frac{dr}{dt} .$$

Итак, получаем простенькое дифференциальное уравнение

$$r^2 dr = \frac{6q^2}{4\pi \cdot 4\pi\epsilon_0 \rho a^2 v} dt .$$

Проинтегрируем его, учитывая граничные условия: при  $t = 0$  расстояние между каплями  $r = r_0$ , а в некоторый момент времени  $\tau$  капли окажутся уже так близко друг к другу, что расстояние  $r$  можно считать пренебрежимо малым по сравнению с  $r_0$  — ну, почти нулевым (для упрощения оценок). Получим

$$\tau = \frac{4}{3} \pi \frac{r_0^3 \cdot 4\pi\epsilon_0 \rho a^2 v}{6q^2} .$$

Теперь перейдем к численным оценкам. Пусть каждая из капелек несет единичный элементарный заряд  $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, температура смеси  $T = 260$  К и ее плотность  $\rho = 0,9$  кг/м<sup>3</sup>, а  $r_0$  соответствует плотности следа 50 ионов/см (след  $\beta$ -частицы), т.е.  $r_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м. И конечно, все знают, что  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>. Тогда

$$\tau = \frac{4}{3} \pi \frac{(2 \cdot 10^{-4})^3 \cdot 0,9 \cdot \sqrt{3 \cdot 8,31 \cdot 260 / (29 \cdot 10^{-3})}}{6 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9} a^2 \approx 10^{19} a^2.$$

Следовательно, для размеров капелек  $a \sim 10^{-9}$  м (если такие объекты можно считать капельками) рекомбинация происходит приблизительно за 10 секунд, а для капелек с  $a = 10^{-8}$  м – уже за 1000 секунд. Конечно, капли будут расти со временем за счет конденсации пара, диффундирующего к ним из отдаленных уголков камеры, так что это время еще увеличится. Впрочем, можно ведь не ждать, пока капельки сами рекомбинируют или осядут на дно камеры под действием силы тяжести, а догадаться включить электрическое поле, которое растащит их в разные стороны.

Понятно, что с увеличением плотности смеси газов в камере заряженная частица на единице длины своей траектории будет встречать все больше молекул, ее след будет все короче, что позволит регистрировать все более энергичные частицы в том же объеме камеры. Поэтому имеются камеры с давлением до сотен атмосфер.

За десятки лет при помощи камеры Вильсона были получены многие миллионы фотографий, позволившие глубоко изучить физику ядерных процессов. В настоящее время в экспериментальной ядерной физике стали применять другие, более быстродействующие приборы – пузырьковые и стримерные камеры, а также диффузионные камеры постоянного действия.

Приложение к журналу «Квант» №3/2015

## **Школа в «Кванте»**

### **ФИЗИКА**

#### **Часть 1**

Составители *В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 6,5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)

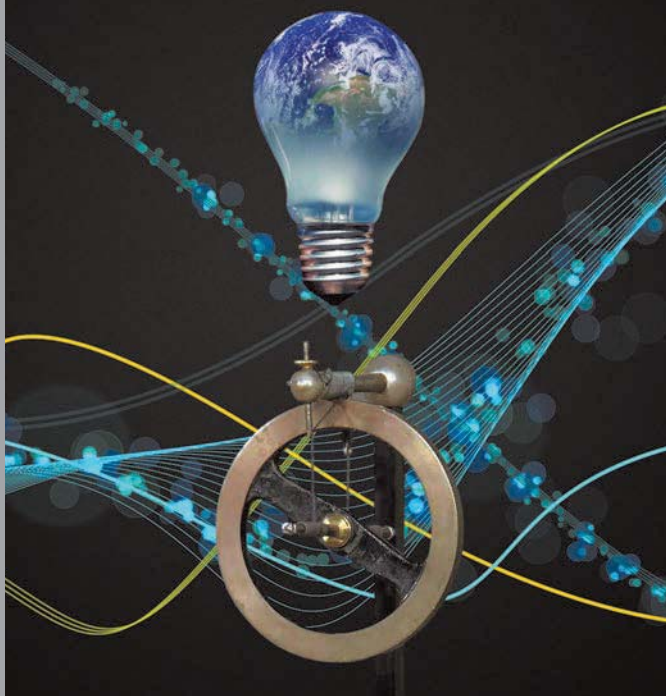
Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

Индекс 90964



ШКОЛА В «КВАНТЕ»  
ФИЗИКА  
Часть 1



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№ 3/2015